

# Istituzioni di Analisi Superiore

Laurea Magistrale in Matematica & Matematica per le Applicazioni

Registro Didattico a.a. 2016/2017

9 gennaio 2017

**Lezione 1-2 (3 ottobre 2016)** Introduzione al corso. Teoria della misura: cosa vuol dire “misurare” e quali sono le principali problematiche. Controesempio di Vitali (insieme non misurabile in  $\mathbb{R}$ ). Misura di Peano-Jordan in  $\mathbb{R}^N$ : definizione e sue proprietà.

**Lezione 3-4 (4 ottobre 2016)** Insiemi non misurabili secondo Peano-Jordan. Connessione con l'integrale di Riemann: integrale di Darboux. Esercizio svolto: equivalenza tra la misurabilità secondo PJ di un insieme e l'integrabilità secondo Darboux della sua funzione caratteristica.

**Lezione 5-6 (6 ottobre 2016)** Proprietà di una misura: monotonia, subadditività numerabile, continuità dall'alto e dal basso. Misure complete e completamento di una misura (Teorema).

**Lezione 7-8 (10 ottobre 2016)** Misure esterne: definizione, costruzione di una misura esterna. Nozione di misurabilità (alla Caratheodory) rispetto ad una misura esterna. Teorema di Caratheodory.

**Lezione 9-10 (11 ottobre 2016)** Definizione di premisura. Costruzione di una misura esterna a partire da una premisura e sue proprietà.

**Lezione 11-12 (12 ottobre 2016)** La misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^N$ : dimostrazione che la misura elementare dei plurirettangoli costituisce una premisura. Derivazione della misura di Lebesgue e sue proprietà dai risultati astratti. Regolarità interna ed esterna della misura di Lebesgue.

**Lezione 11-12 (17 ottobre 2016)** Conseguenze della regolarità esterna e interna della misura di Lebesgue:  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^N)$  è il completamento di  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^N)$ ; confronto tra la misura di Lebesgue e quella di Peano-Jordan e caratterizzazione degli insiemi PJ-misurabili (vedi esercizi). Esempi: l'insieme  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  è misurabile secondo Lebesgue (ma non secondo Peano-Jordan); i razionali gonfiati (esempio di aperto non limitato e denso in  $\mathbb{R}$  di misura piccola a piacere); l'insieme di Cantor e sue proprietà.

**Lezione 13-14 (18 ottobre 2016)** Esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue. Esercizio: ogni insieme di misura esterna positiva contiene un insieme non misurabile. Esercizio: un insieme limitato in  $\mathbb{R}^N$  è PJ-misurabile se e solo se è Lebesgue misurabile e  $\partial E$  ha misura di Lebesgue nulla.

**Lezione 15-16 (20 ottobre 2016)** Teoria dell'integrazione: definizione di funzione  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -misurabile tra due spazi misurabili  $(X, \mathcal{M})$  e  $(Y, \mathcal{N})$ ; la composizione di funzioni misurabili è misurabile; una funzione continua tra due spazi topologici  $X$  e  $Y$  è  $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$ -misurabile. Caso di  $Y = \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e  $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ : somma, prodotto, inf, sup, liminf e limsup di funzioni misurabili è misurabile; le parti positiva e negativa di una funzione misurabile sono misurabili; definizione di funzione semplice. Teorema: approssimazione di una funzione misurabile non negativa con funzioni semplici.

**Lezione 17-18 (24 ottobre 2016)** Definizione di integrale di una funzione semplice e sue proprietà. Definizione di integrale di una funzione misurabile non negativa. Teorema della convergenza monotona.

**Lezione 19-20 (25 ottobre 2016)** Additività dell'integrale. Proposizione: l'integrale di una funzione non negativa  $f$  è zero se e solo se  $f = 0$  quasi ovunque. Lemma di Fatou. Definizione di integrale per funzioni di segno variabile. Definizione di funzione integrabile. Lo spazio delle funzioni a valori reali integrabili è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare.

**Lezione 21-22 (27 ottobre 2016)** Varie proprietà dell'integrale: modulo dell'integrale è minore o uguale all'integrale del modulo; indipendenza dell'integrale da modifiche della funzione integranda su insiemi di misura nulla. Generalizzazione del Teorema della Convergenza Monotona e del Lemma di Fatou: basta che le condizioni e/o le convergenze puntuali valgano quasi ovunque. Cenni all'integrazione delle funzioni complesse. Spazio  $L^1(X)$ . Teorema della convergenza dominata. Scambio tra integrale e serie (teorema).

**Lezione 23-24 (3 novembre 2016)** Derivazione sotto il segno di integrale. Funzione di Cantor-Vitali (o scala del Diavolo) e derivati: esempio di funzione continua che manda un insieme di misura nulla in un insieme di misura positiva; esempio di funzione continua tale che la controimmagine di un insieme Lebesgue misurabile è non misurabile; esempio di insieme Lebesgue misurabile non Boreliano.

**Lezione 25-26 (7 novembre 2016)** Relazione tra integrabilità secondo Riemann e secondo Lebesgue e caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili (con dimostrazione). Addendum: integrale di Lebesgue-Stieltjes in  $\mathbb{R}$ . Relazioni tra i vari tipi di convergenze per funzioni  $L^1$ : convergenza uniforme, quasi ovunque, in  $L^1(X)$ . Teorema: una successione di funzioni convergente in  $L^1(X)$  ammette una estratta convergente quasi ovunque. Generalità su spazi vettoriali normati: definizione di norma e di spazio di Banach; caratterizzazione della completezza tramite serie.

**Lezione 27-28 (8 novembre 2016)** Definizione di prodotto scalare complesso; disuguaglianza di Schwartz; il prodotto scalare induce una norma; identità del parallelogramma; definizioni di spazi di Banach e di Hilbert. Spazi  $L^p(X, \mu)$ : introduzione;  $\|\cdot\|_p$  non è una norma su  $L^p(X, \mu)$  per  $0 < p < 1$ . Disuguaglianza di Hölder, disuguaglianza di Minkowski.

**Lezione 29-30 (10 novembre 2016)** Norma  $\|\cdot\|_\infty$  e spazio  $L^\infty(X)$ ;  $L^p(X)$  è uno spazio di Banach per  $1 \leq p \leq +\infty$ . Relazioni tra spazi  $L^p(X)$  al variare di  $p$ ; disuguaglianza di interpolazione; caso  $\mu(X) < +\infty$ .

**Lezione 31-32 (21 novembre 2016)** Spazi prodotto,  $\sigma$ -algebre prodotto, misure prodotto.

**Lezione 33-34 (22 novembre 2016)** Teorema di Fubini–Tonelli.

**Lezione 35-36 (24 novembre 2016)** Teorema di Fubini–Tonelli: esempi e controesempi. Teorema di Fubini–Tonelli per il completamento di  $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ . Applicazioni: relazione tra integrale di una funzione e sua funzione di distribuzione; convoluzioni.

**Lezione 37-38 (28 novembre 2016)** Misure con segno: definizione, osservazioni ed esempi. Continuità dall'alto e dal basso di una funzione con segno.

**Lezione 39-40 (29 novembre 2016)** Insieme positivo, negativo e nullo per una misura con segno. Teorema di decomposizione di Hahn. Misure mutualmente singolari: definizione ed esempi.

**Lezione 41-42 (1 dicembre 2016)** Teorema di decomposizione di Jordan. Definizione di variazione positiva, negativa, totale di una misura. Definizione di assoluta continuità di una misura e teorema relativo.

**Lezione 43-44 (5 dicembre 2016)** Teorema di Radon–Nikodym. Teorema di decomposizione di Lebesgue.

**Lezione 45-46 (6 dicembre 2016)** Separabilità di  $L^p(X, \mu)$  per  $1 \leq p < +\infty$ : teorema generale; dimostrazione nel caso  $X$  aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $\mu$  misura di Lebesgue. Densità di  $C_c(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$  per  $1 \leq p < +\infty$ . Non separabilità di  $L^\infty(X)$ : teorema generale; dimostrazione nel caso di  $L^\infty(\Omega)$  e  $\ell^\infty$ .

**Lezione 47-48 (6 dicembre 2016)** Convoluzione  $f * g$  di due funzioni  $f, g$ : caso  $f \in L^1$  e  $g \in L^p$ ; caso  $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ ; definizione generalizzata di supporto di una funzione; supporto di  $f * g$ ; caso  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$  (solo enunciato). Mollificatori e regolarizzazione. Convergenza di  $\rho_n * f$  a  $f$ : convergenza locale uniforme nel caso  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ ; convergenza in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  nel caso  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ .

**Lezione 49-50 (12 dicembre 2016)** Corollari: densità di  $C_c^\infty(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$  per  $1 \leq p < +\infty$ ; se  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , la relazione  $\int_\Omega u(x) \varphi(x) dx = 0$  per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  implica  $u = 0$  q.o. in  $\Omega$ . Funzionali lineari su spazi vettoriali normati: funzionali lineari, funzionali lineari continui, funzionali lineari limitati. Duale di uno spazio vettoriale normato, norma duale, proprietà. Relazione tra il duale di  $L^p(X)$  e  $L^q(X)$  (con  $p$  e  $q$  esponenti coniugati).

**Lezione 51-52 (13 dicembre 2016)** Teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di  $L^p(X)$  con  $1 \leq p < +\infty$  (con dimostrazione). L'inclusione  $L^1(X) \subseteq (L^\infty(X))'$  è sempre stretta (a parte il caso in cui  $L^\infty(X)$  sia finito dimensionale): enunciato ed esempio nel caso di  $X := \mathbb{R}^N$  con la misura di Lebesgue.

**Lezione 53-54 (15 dicembre 2016)** Teorema di Riesz: se la palla unitaria di uno spazio vettoriale normato  $E$  è compatta, allora  $E$  ha dimensione finita. Svolgimento di alcuni degli esercizi proposti su spazi normati e funzionali lineari.

**Lezione 55-56 (19 dicembre 2016)** Definizione di punto di Lebesgue per una funzione in  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$  e teorema relativo (solo enunciato). Antiderivata di una funzione  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  e sue proprietà. Derivabilità quasi ovunque delle funzioni monotone e cenni alla dimostrazione. Funzioni a variazione limitata: definizione; variazione totale di una funzione su un intervallo e sue proprietà; esempi di funzioni a variazione limitata.

**Lezione 57-58 (21 dicembre 2016)** Una funzione  $u$  a variazione limitata su un intervallo si può scrivere come differenza di due funzioni monotone  $u_1, u_2$ ; relazione tra la variazione totale di  $u$  su un intervallo ed  $u_1, u_2$ . Funzioni assolutamente

continue: definizione; una funzione assolutamente continua è a variazione limitata; una funzione assolutamente continua è derivabile quasi ovunque e soddisfa il teorema fondamentale del calcolo integrale.

**Lezione 59-60 (9 gennaio 2017)** Commenti sulla decomposizione della misura di Lebesgue–Stieltjes associata ad una funzione crescente in parte assolutamente continua, parte di salto e parte Cantoriana. Teorema di Rademacher per funzioni localmente Lipschitziane (solo enunciato). Cenni sulle funzioni convesse: definizione di funzione convessa, definizione di sottodifferenziale di una funzione convessa. Teorema: una funzione reale definita su un aperto convesso è convessa se e solo se il suo sottodifferenziale è non vuoto in ogni punto (solo enunciato). Teorema: una funzione convessa definita su un aperto convesso è localmente Lipschitziana (solo enunciato). Teorema di Jensen, corollario ed esempi.

**Referenze bibliografiche:** per le lezioni 1–4 si vedano le dispense di T. Tao. Per le lezioni 5–36 e 49–52 si veda G.B. FOLLAND, *Real Analysis* (capitoli 1, 2, 5, 6, 7). Per le lezioni 35–36, 49–50, 59–60 si veda anche W.RUDIN, *Real and Complex Analysis*. Per le lezioni 37–44 e 55–58 si veda R.F. BASS, *Real Analysis for graduate students*. Per le lezioni 45–54 si veda H. BREZIS, *Analisi Funzionale*.