ESERCIZI DI ANALISI REALE - FOGLIO 1

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

A.A. 2017-18

ANDREA DAVINI

SOMMARIO. Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono più difficili

Chiameremo *plurirettangolo* (limitato) un insieme che si può scrivere come unione di un numero finito di rettangoli limitati. Si osservi che ogni plurirettangolo si può sempre scrivere come unione *disgiunta* di un numero finito di rettangoli. Nel seguito, indicheremo con $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ la collezione dei plurirettangoli di $\mathbb{R}^d$.

Esercizio 1. Siano $R_1, \dots, R_k$ rettangoli limitati e disgiunti in $\mathbb{R}^d$ e sia $P := R_1 \cup \dots \cup R_k$. Verificare che

$$|R_1| + \dots + |R_k| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^d} \# \left(P \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \right),$$

dove abbiamo indicato con $|R_i|$ il volume di R_i e con $\#A$ la cardinalità dell'insieme A. Dedurre che la misura elementare di P data da

$$m(P) := |R_1| + \dots + |R_k|$$

è ben definita.

Esercizio 2. Verificare che $m : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty)$ verifica le seguenti proprietà:

(1) *(additività finita)*
$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) = m(E_1) + \dots + m(E_n)$ per ogni $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ a due a due disgiunti;
(2) $m(\emptyset) = 0$;
(3) $m(R) = |R|$ se R è un rettangolo;
(4) *(monotonia)*
$m(E) \leqslant m(F)$ se $E \subseteq F$;
(5) *(subadditività finita)*
$m(E_1 \cup \dots \cup E_n) \leqslant m(E_1) + \dots + m(E_n)$ per ogni $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$;
(6) *(invarianza per traslazioni)*
$m(E + x) = m(E)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

Esercizio 3 (Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano–Jordan)**.** Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

(i) E è misurabile secondo Peano–Jordan;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ tali che $A \subseteq E \subseteq B$ e $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

Date: 29 settembre 2017.

(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ tale che $\quad m^*(A\Delta E) < \varepsilon$.

Esercizio 4. Siano E, F insiemi limitati in $\mathbb{R}^d$ e misurabili secondo Peano–Jordan (*PJ–misurabili* per brevità).

- Verificare che $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ e $E\Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ sono ancora PJ–misurabili;
- verificare quindi che le proprietà (1)–(6) dell'Esercizio 2 si estendono dai plurirettangoli agli insiemi limitati PJ–misurabili.

Esercizio 5. Sia E un insieme limitato in $\mathbb{R}^d$.

(i) Dimostrare che

$$m_*(E) = \sup\{m(P) \,:\, P \text{ plurirettangolo aperto} \subseteq E\}.$$

Dedurre che E e la sua parte interna $\mathrm{int}(E)$ hanno stessa misura interna di Peano–Jordan;

(ii) dimostrare che

$$m^*(E) = \inf\{m(P) \,:\, P \text{ plurirettangolo chiuso} \supseteq E\}.$$

Dedurre che E e la sua chiusura $\overline{E}$ hanno stessa misura esterna di Peano–Jordan;

(iii) dimostrare che E è PJ–misurabile se e solo se $\mathrm{int}(E)$ ed $\overline{E}$ sono PJ–misurabili e $m(\mathrm{int}(E)) = m(\overline{E})$.

(v) siano $E := [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ e $F := [0,1]^2 \cap Q^2$. Verificare che $m_*(E) = m_*(F) = 0$ e $m^*(E) = m^*(F) = 1$. In particolare, E ed F non sono PJ–misurabili.

Esercizio* 6. Dimostrare che E è PJ–misurabile se e solo se il bordo topologico ∂E di E ha misura esterna di PJ nulla, i.e. $m^*(\partial E) = 0$.

Esercizio 7. Mostrare con degli esempi che l'unione numerabile e l'intersezione numerabile di insiemi PJ–misurabili in $\mathbb{R}^d$ non è in generale PJ–misurabile, anche quando tutti questi insiemi sono limitati.

Esercizio 8 (Proprietà alla Caratheodory)**.** Sia P un plurirettangolo limitato in $\mathbb{R}^d$. Mostrare che, per ogni insieme limitato E di $\mathbb{R}^d$, vale la seguente proprietà:

$$m^*(E) = m^*(E \cap P) + m^*(E \setminus P).$$

Vogliamo adesso confrontare l'integrale di Darboux con l'integrale di Riemann. Per la definizione di integrabilità secondo Darboux e di integrale di Darboux, rimandiamo alle dispense di T. Tao. Ricordiamo qui la definizione di funzione Riemann–integrabile e di integrale di Riemann. Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato. Una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$ è una collezione finita di punti $t_0, \dots, t_k$ tali che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Data una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$, definiamo

$$s_{\mathcal{P}} := \sum_{j=0}^{k-1} m_j \, |t_{j+1} - t_j|, \qquad S_{\mathcal{P}} := \sum_{j=0}^{k-1} M_j \, |t_{j+1} - t_j|,$$

dove $m_j := \inf_{x\in[t_j,t_{j+1}]} f(x)$ e $M_j := \sup_{x\in[t_j,t_{j+1}]} f(x)$. L'integrale inferiore e superiore di f sono definiti rispettivamente come

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s_{\mathcal{P}} \,:\, \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\}$$

$$\mathcal{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S_{\mathcal{P}} \,:\, \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\}.$$

Diciamo che f è *Riemann–integrabile* se il suo integrale inferiore e superiore coincidono. In tal caso, chiamiamo *integrale di Riemann di f* questo valore comune.

Esercizio 9. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dimostrare che l'integrale inferiore (rispettivamente superiore) di Darboux coincide con l'integrale inferiore (risp. superiore) secondo Riemann. Dedurne che f è integrabile secondo Riemann se e solo se ìntegrabile secondo Darboux, e che, in tal caso, i due integrali coincidono.