ESERCIZI DI ANALISI REALE - FOGLIO 3

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

A.A. 2017-18

ANDREA DAVINI

SOMMARIO. Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono più difficili

In questo foglio indicheremo con λ^* la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$, con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la σ–algebra degli insiemi Lebesgue–misurabili e con $\mathcal{L}^d := \lambda^*_{|\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$. Indicheremo con $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ la σ–algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^d$.

Un insieme si dice G_δ se è una intersezione numerabile di aperti, F_σ se è una unione numerabile di chiusi.

Esercizio 1. Sia $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}^d$ che sia invariante per traslazioni e finita sui compatti (cioè $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$). Si dimostri che $\mu = \gamma\,\mathcal{L}^d$ per una opportuna costante $\gamma \geqslant 0$ (cioè μ è proporzionale alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$). Si trovi un'espressione per γ.

[Suggerimento: è sufficiente dimostrare l'uguaglianza sui cubi $[0, 1/k)^d$ per $k \in \mathbb{N}^+$ (perchè?)]

Esercizio 2. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che esiste un insieme G di tipo G_δ con $E \subseteq G$ e $\lambda^*(E) = \mathcal{L}^d(G)$.

Esercizio 3 (Caratterizzazione della misurabilità secondo Lebesgue)**.** Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un insieme. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

(i) E è misurabile secondo Lebesgue;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $\lambda^*(A \setminus E) < \varepsilon$;
(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $\lambda^*(E \setminus C) < \varepsilon$;
(iv) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C e un aperto A in $\mathbb{R}^d$ tali che $C \subseteq E \subseteq A$ e $\mathcal{L}^d(A \setminus C) < \varepsilon$;
(v) esiste un insieme G di tipo G_δ ed un insieme N di misura nulla tale che $E = G \setminus N$;
(vi) esiste un insieme F di tipo F_σ ed un insieme Z di misura nulla tale che $E = F \cup Z$

Esercizio 4. Sia E un insieme di $\mathbb{R}^d$ tale che $\lambda^*(\partial E) = 0$. Dimostrare che E è misurabile secondo Lebesgue.

Esercizio* 5. Sia K un insieme compatto di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che $\lambda^*(K) = m^*(K)$, dove abbiamo indicato con m^* la misura esterna di Peano–Jordan.

Esercizio* 6. Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che E è misurabile secondo Peano–Jordan se e solo se $\lambda^*(\partial E) = 0$.

Date: 28 ottobre 2017.

Esercizio* 7. Dato $\varepsilon > 0$, trovare un insieme aperto e denso in $\mathbb{R}$ di misura uguale a ε.

Esercizio 8. Sia E un insieme in $\mathbb{R}$ di misura di Lebesgue nulla. Provare che E é totalmente sconnesso (cioè non contiene intervalli aperti).

Esercizio 9. Si trovi un insieme Boreliano E contenuto nell'intervallo $[0, 1]$ che sia totalmente sconnesso e tale che $\mathcal{L}^1(E) = 1$.

Esercizio* 10. Sia $0 < \delta < 1$. Si trovi un insieme Boreliano E contenuto e denso nell'intervallo $[0, 1]$ totalmente sconnesso e tale che $\delta < \mathcal{L}^1(E) < 1$.

[Suggerimento: usare l'insieme ottenuto intersecando i razionali gonfiati con l'intervallo $(0, 1)$.]