ESERCIZI DI ANALISI REALE - FOGLIO 7

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

A.A. 2017-18

ANDREA DAVINI

SOMMARIO. Eventuali commenti, suggerimenti e segnalazioni di errori sono graditi. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco sono più difficili

In questa sezione, se non diversamente specificato, E indicherà uno spazio vettoriale reale normato ed E' lo spazio vettoriale reale dei funzionali lineari e continui da E in $\mathbb{R}$. Per ogni $T \in E'$, definiamo

$$\|T\|_{E'} := \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} |T(x)|.$$

Esercizio 1. Sia $x_n \to x$ in E. Verificare che $\quad \|x_n\| \to \|x\|$.

Esercizio 2. Verificare i fatti seguenti:

- $\|T\|_{E'} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} T(x) = \sup_{\|x\|=1} |T(x)| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{|T(x)|}{\|x\|}$;
- $\|T\|_{E'}$ è la più piccola costante $C \geqslant 0$ tale che
$$|T(x)| \leqslant C\|x\| \quad \text{per ogni } x \in E.$$

Esercizio 3. Dimostrare che $\|\cdot\|_{E'}$ è una norma su E'.

Esercizio 4. Dimostrare che E' dotato della norma $\|\cdot\|_{E'}$ è uno spazio di Banach (anche se E non è completo).

Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su uno spazio vettoriale reale E si dicono *equivalenti* se esistono costanti reali α, $\beta > 0$ tali che

$$\alpha\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant \beta\|x\|_a \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Esercizio 5. Su $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, consideriamo la norma

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d| \qquad \text{per } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrare che la palla unitaria $\quad B := \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\|_1 \leqslant 1\} \quad$ è compatta.

Esercizio 6. Su $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, consideriamo la norma

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d| \qquad \text{per } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Sia $\|\cdot\|$ un'altra norma su $\mathbb{R}^d$.

Date: 6 gennaio 2018.

(a) Dimostrare che esiste una costante $\beta > 0$ tale che

$$\|x\| \leqslant \beta \|x\|_1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

In particolare, $x \mapsto \|x\|$ è continua in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$.

(b) Dimostrare che esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\| \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

(c) Concludere che tutte le norme sono equivalenti in $\mathbb{R}^d$.

Esercizio 7. Sia E uno spazio vettoriale reale di dimensione d finita e sia $\|\cdot\|_E$ una norma su E.

(a) Dimostrare che esiste una norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^d$ ed una applicazione lineare bigettiva $T : \mathbb{R}^d \to E$ tale che $\|T(x)\|_E = \|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.([1])

(b) Dedurre che tutte le norme su E sono equivalenti.

Esercizio 8. Sia E uno spazio vettoriale reale normato ed F un sottospazio di E di dimensione finita. Dimostrare che F è chiuso in E.

[Suggerimento: sfruttare l'esercizio 7.]

Esercizio 9. Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ una isometria, cioè una mappa lineare tale che $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ per ogni $x \in E$. Dimostrare che $T(E)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di F.

Esercizio 10. Sia E uno spazio di Banach e sia V un suo sottospazio vettoriale chiuso. Sia $z_0 \notin V$ e poniamo

$$F := V + \mathbb{R}z_0 = \{x + tz_0 \,:\, x \in V,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Vogliamo dimostrare che F è chiuso in E.

(a) Sia $(x_n)_n$ e $(t_n)_n$ successioni in V ed $\mathbb{R}$, rispettivamente, tali che $x_n + t_n z_0 \to y$ in E. Dimostrare che $(t_n)_n$ è limitata.

(b) Dedurre che $y \in F$.

Esercizio 11. Sia E uno spazio vettoriale reale e normato di dimensione finita. Dimostrare che ogni funzionale lineare $L : E \to \mathbb{R}$ è continuo.

Esercizio 12. Sia E uno spazio vettoriale reale e normato di dimensione finita. Dimostrare che E ha dimensione finita se e solo se E' ha dimensione finita e in tal caso si ha $\dim(E) = \dim(E')$.

---

[1] Una tale mappa T si chiama *isomorfismo isometrico*.

Esercizio 13. Sia $E := \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty \,:\, x_n \neq 0 \text{ solo per un numero finito di indici}\}$ dotato della norma $\|x\| := \sup_n |x_n|$. Sia $T : E \to \mathbb{R}$ il funzionale definito come

$$T(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x_n.$$

Verificare che T è lineare ma non è continuo.

Esercizio 14. Dare un esempio di uno spazio vettoriale normato E e di un funzionale $T \in E'$ tale che il sup nella definizione di $\|T\|_{E'}$ non è atteso, o, equivalentemente, che

$$|T(x)| < \|T\|_{E'} \qquad \text{per ogni } \|x\| = 1.$$

Esercizio 15. Sia $E := \{x = (x_n)_n \in \ell^\infty \,:\, \lim_n x_n = 0\}$ dotato della norma $\|x\| := \sup_n |x_n|$. Sia $T : E \to \mathbb{R}$ il funzionale definito come

$$T(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x_n.$$

- Verificare che $T \in E'$ e calcolare $\|T\|_{E'}$.
- Dire se esiste un elemento $x \in E$ tale che $\|x\|_\infty = 1$ e $T(x) = \|T\|_{E'}$.
- Dire se E è uno spazio di Banach.

Esercizio 16. Sia $E := \{u \in C([0,1]) \,:\, u(0) = 0\}$ dotato della norma usuale $\|u\| := \max_{x\in[0,1]} |u(x)|$. Sia $T : E \to \mathbb{R}$ il funzionale definito come

$$T(u) := \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Verificare che $T \in E'$ e calcolare $\|T\|_{E'}$.
- Dire se esiste un elemento $u \in E$ tale che $\|u\| = 1$ e $T(u) = \|T\|_{E'}$.
- Dire se E è uno spazio di Banach.