Calcolo Integrale

Laurea Triennale in Informatica

Registro Didattico a.a. 2018/2019

27 giugno 2019

Lezione 1 (25 febbraio 2019) Introduzione al corso. Cenni tra teoria dell'integrazione e teoria della misura. Il metodo esaustivo: calcolo dell'area del cerchio come limite di poligoni regolari inscritti e circoscritti. Integrale (definito) di Riemann: definizione di partizione P dell'intervallo $[a, b]$; somma inferiore $L(f, P)$ e somma superiore $U(f, P)$ di Riemann di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata; cosa vuol dire che f è Riemann integrabile; definizione di integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$. Esempio: verificare che la funzione $f(x) = x$ è integrabile in $[0, 1]$ e calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$. Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata sia integrabile. Classi di funzioni integrabili: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua è integrabile; $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona è integrabile (solo enunciati). Proprietà dell'integrale: linearità dell'integrale; additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione; positività e monotonia dell'integrale.

Lezione 2 (28 febbraio 2019) Proprietà dell'integrale: definizione di integrale di una funzione tra a e b quando $b < a$; additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione (indipendentemente dall'ordine degli estremi di integrazione). Simbolo di sommatoria e indice di sommatoria: notazione, esempi, calcolo di una somma telescopica. Ripasso sulla definizione di integrale (definito) di Riemann: somma inferiore $L(f, P)$ e somma superiore $U(f, P)$ di Riemann di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata; cosa vuol dire che f è Riemann integrabile; definizione di integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$. Confronto con la definizione di R.A. Adams.

Lezione 3 (4 marzo 2019) Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata sia integrabile secondo Riemann. Classi di funzioni integrabili: le funzioni continue sono integrabili (senza dimostrazione); le funzioni monotone sono integrabili (con dimostrazione). Richiamo sulle funzioni monotone e sui loro eventuali punti di discontinuitá.

Lezione 4 (7 marzo 2019) Osservazione: siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni limitate tali che $(f - g)(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b] \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}$. Se f è Riemann integrabile, allora anche g lo è e si ha $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Teorema: se $f_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni limitate e integrabili, allora la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ottenuta incollando le due funzioni f_1 ed f_2 è integrabile e si ha

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx$. Corollario: una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua a tratti è integrabile. Teorema della media integrale (con dimostrazione). Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (con dimostrazione).

Lezione 5 (11 marzo 2019) Calcolo di integrali definiti tramite applicazione del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale. Esercizi sul calcolo di primitive e dell'area compresa tra il grafico di due funzioni. Calcolo della derivata delle seguenti funzioni integrali: $\int_x^3 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$, $\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

Lezione 6 (14 marzo 2019) Esercizi sugli integrali. Calcolo di $\int \cos^2(x)dx$ e $\int \sin^2(x)dx$. Integrale per sostituzione ed esercizi. Dimostrazione che $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ nel caso in cui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia pari e $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ nel caso in cui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia dispari.

Lezione 7 (18 marzo 2019) Integrale di funzioni razionali: riduzione al caso in cui il polimonio $P(x)$ a numeratore ha grado strettamente inferiore di quello del denominatore $Q(x)$ (divisione tra polinomi); fratte semplici; caso in cui $Q(x)$ ha solo radici reali distinte. Esercizi ed esempi.

Lezione 8 (21 marzo 2019) Integrale di funzioni razionali: caso in cui $Q(x)$ ha radici reali distinte e radici complesse distinte; caso in cui $Q(x)$ ha radici complesse distinte e radici reali con molteplicità. Formula di integrazione per parti. Esercizi ed esempi.

Lezione 9 (25 marzo 2019) Risoluzioni di diversi integrali indefiniti presi da testi di esame.

Lezione 10 (28 marzo 2019) Integrali impropri (o generalizzati): integrazione di funzioni non limitate definite su intervalli limitati; criterio del confronto e del confronto asintotico per funzioni non negative (o non positive); una funzione assolutamente integrabile è integrabile. Esempi notevoli: convergenza/divergenza dell'integrale $\int_0^1 x^{-p}\,dx$ per $p > 0$. Esercizi ed esempi. Integrazione di funzioni definite su intervalli illimitati. Definizione. Esempi notevoli: convergenza/divergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} x^{-p}\,dx$ per $p > 0$.

Lezione 11 (1 aprile 2019) Integrazione di funzioni definite su intervalli illimitati: criterio del confronto e del confronto asintotico per funzioni non negative. Teorema: una funzione assolutamente integrabile è integrabile. Ma non vale il viceversa: esempio $\int_1^{+\infty} \sin(x)/x\,dx$. Esercizi su integrali impropri.

Lezione 12 (4 aprile 2019) Definizione di successione numerica e di limite di una successione. Proprietà del limite rispetto a somma, prodotto, rapporto, elevamento a potenza e forme indeterminate. Teorema dei due carabinieri. Teorema: una successione convergente è limitata. Teorema di regolaritá delle successioni monotone. Numero di Nepero e come limite della successione $\left((1+1/n)^n\right)_n$. Limite di x^n per $|x| < 1$ e di $x^n/n!$. Esercizi ed esempi.

Lezione 13 (15 aprile 2019) Gerarchia degli infiniti per successioni. Serie: successione delle somme parziali, somma di una serie, serie convergente, serie divergente. Alcune serie fondamentali: serie armonica, serie armonica generalizzata, serie geometrica di ragione $q > 0$. Alcuni teoremi sulle serie: se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$ (con dimostrazione); regolarità delle serie a termini non negativi (con dimostrazione); somma e differenza di due serie, moltiplicazione di una serie per uno scalare, monotonia della somma di una serie. Criteri per serie a termini non negativi: criterio di confronto asintotico. Esercizi ed esempi.

Lezione 14 (29 aprile 2019) Criteri per serie a termini non negativi: criterio di confronto asintotico; criterio del confronto; criterio del rapporto; criterio della radice. Esercizi ed esempi. Serie con termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Esercizi.

Lezione 15 (2 maggio 2019) Teorema di Leibnitz per serie a segno alterno ed esempi. Dimostrazione del criterio della radice per serie a termini non negativi. Serie di potenze: centro di convergenza e raggio di convergenza. Teorema di Cauchy–Hadamard per serie di potenze (con dimostrazione).

Lezione 16 (6 maggio 2019) Studio della convergenza di alcune serie di potenze. Derivazione e integrazione di serie di potenze. Applicazione: calcolo di alcuni sviluppi in serie di potenze di funzioni.

Lezione 17 (9 maggio 2019) Polinomio di Taylor e sua ottimalità tra i polinomi approssimanti. Calcolo del polinomio di Taylor di alcune funzioni elementari. Teorema di Taylor ed espressione del resto nella forma di Lagrange. Serie di Taylor e sviluppo in serie di Taylor di alcune funzioni elementari.

Lezione 18 (13 maggio 2019) Esercizi su serie di Taylor e di potenze. Equazioni differenziali: introduzione e generalità. Equazioni differenziali lineari: le soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea sono uno spazio vettoriale (con dimostrazione); le soluzioni di una equazione differenziale lineare non omogenea si ottengono aggiungendo ad una soluzione particolare dell'equazione la soluzione generale dell'omogenea associata (con dimostrazione). (omogenee e non omogenee).

Lezione 19 (16 maggio 2019) Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula per le soluzioni di una equazione omogenea; formula per le soluzioni di una equazione non omogenea; Teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy. Esercizi.

Lezione 20 (20 maggio 2019) Esercizi su equazioni differenziali lineari del primo ordine e problemi di Cauchy associati. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy associato. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti: ricerca di soluzioni della forma $\mathrm{e}^{\lambda t}$ e polinomio caratteristico. Caso di radici reali distinte; caso di radici reali coincidenti. Esempi ed esercizi.

Lezione 21 (23 maggio 2019) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti: caso di radici complesse coniugate. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee: la soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare dell'equazione e dalla soluzione generale dell'omogenea associata. Ricerca di soluzioni particolari tramite il metodo di somiglianza: caso in cui il termine noto $f(t)$ è un polinomio. Caso di risonanza e non risonanza. Esempi ed esercizi.

Lezione 22 (30 maggio 2019) Ricerca di soluzioni particolari tramite il metodo di somiglianza: caso in cui il termine noto $f(t)$ è una costante per un esponenziale (caso di risonanza e di non risonanza). Ricerca di soluzioni particolari tramite il metodo di somiglianza: caso in cui il termine noto $f(t)$ è della forma $\mathrm{e}^{\alpha t}\,(k_1\cos(\beta t)+k_2\sin(\beta t))$ (caso di risonanza e di non risonanza). Ricerca di soluzioni particolari tramite il metodo di somiglianza quando $f(t)$ è del tipo somma di funzioni viste in precedenza (principio di sovrapposizione). Esempi ed esercizi.

Lezione 23 (3 giugno 2019) Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili: esempi ed esercizi. Risoluzione di alcuni problemi di Cauchy per equazioni differenziali del primo e del secondo ordine.