

Istituzioni di Matematica I

Laurea Triennale in Chimica

Registro Didattico a.a. 2020/2021

2 gennaio 2021

Lezione 1-2 (28 settembre 2020) Elementi di insiemistica. Numeri naturali, interi relativi, razionali, reali.

Lezione 3-4 (29 settembre 2020) Definizione di modulo di un numero reale e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare. Intervalli della retta: notazione. Definizione di insieme limitato superiormente/inferiormente. Definizione di maggiorante e minorante. Definizione di massimo e minimo. Definizione di estremo superiore e inferiore. Esempi.

Lezione 5-6 (30 settembre 2020) Esercizi su sup e inf di insiemi. Definizione di esponenziale a^r con $a > 0$ ed $r \in \mathbb{R}$ e sue proprietà.

Lezione 7-8 (1 ottobre 2020) Esercizi su sup e inf di insiemi. Il logaritmo e sue proprietà. Generalità sulle funzioni: dominio, codominio, immagine, funzione iniettiva, suriettiva, biettiva. Definizione di funzione monotona (crescente, decrescente).

Lezione 9-10 (2 ottobre 2020) Esercizi su disequazioni con modulo. Proprietà di monotonia di alcune funzioni: elevamento al quadrato, al cubo, alla $n \in \mathbb{N}$ (cenni), esponenziale e logaritmo. Definizioni di funzione pari e dispari.

Lezione 11-12 (5 ottobre 2020) Proprietà di simmetria dei grafici di funzioni pari e dispari. Definizione di funzione inversa. Inversa di alcune funzioni: quadrato, cubo, esponenziale. Funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse.

Lezione 13-14 (6 ottobre 2020) Numeri complessi. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.

Lezione 15-16 (7 ottobre 2020) Definizione di successione. Definizione di successione limitata inferiormente, limitata superiormente, limitata. Esempi. Cosa vuol dire che una successione verifica una certa proprietà *definitivamente*. Definizione di successione convergente e nozione di limite finito. Esempi.

Lezione 17-18 (8 ottobre 2020) Definizione di successione convergente e nozione di limite finito ed esempi. Definizione di successione divergente ed esempi.

Lezione 19-20 (9 ottobre 2020) Teorema di unicità del limite. Teorema: una successione convergente è limitata. Calcolo del limite di n^α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Successioni monotone: definizioni.

Lezione 21-22 (12 ottobre 2020) Teorema di regolarità delle successioni monotone. Limite della successione $(1 + 1/n)^n$ e numero di Nepero e . Algebra dei limiti e forme indeterminate. Esercizi.

Lezione 23-24 (13 ottobre 2020) Parte intera di un numero reale. Teorema di permanenza del segno. Corollario: proprietà di monotonia del limite. unicità del limite. Teorema dei due carabinieri e applicazioni. Teorema del confronto per successioni divergenti. Criterio del rapporto per successioni e applicazioni.

Lezione 25-26 (14 ottobre 2020) Criterio del rapporto per successioni: idea della dimostrazione. Applicazioni al calcolo di alcuni limiti notevoli e gerarchia degli infiniti.

Lezione 27-28 (15 ottobre 2020) Esercizi. Successioni infinite ed infinitesime. Cosa vuol dire che una successione $(a_n)_n$ è un infinito (rispettivamente, infinitesimo) di ordine superiore, inferiore o dello stesso ordine rispetto a $(b_n)_n$. Infiniti e infinitesimi asintoticamente equivalenti. Definizione di sottosuccessione estratta da una successione data. Teorema: se la successione $(a_n)_n$ ha limite ℓ (finito o infinito), allora ogni sua sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ tende allo stesso limite ℓ .

Lezione 29-30 (16 ottobre 2020) Esercizi sul calcolo di limiti di successioni.

Lezione 31-32 (19 ottobre 2020) Serie numeriche: generalità. Esempio della scacchiera. Achille e la tartaruga. Serie geometrica: calcolo del carattere e della somma della serie geometrica.

Lezione 33-34 (20 ottobre 2020) Altri esempi di serie: serie armonica, serie di Mengoli, serie telescopiche. Proposizione: se una serie $\sum a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$. Non vale il viceversa. Esempi ed esercizi.

Lezione 35-36 (21 ottobre 2020) Serie a termini non negativi: regolarità delle serie a termini non negativi; criterio del confronto e del confronto asintotico. Applicazione: la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$. Esercizi

Esercitazione (22 ottobre 2020) Esercizi su successioni e serie.

Lezione 37-38 (23 ottobre 2020) Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.

Lezione 39-40 (26 ottobre 2020) Serie a termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Serie a segno alterno: criterio di Leibniz. Esercizi. Principio di induzione con applicazione ad un esempio.

Lezione 41-42 (27 ottobre 2020) Dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli attraverso il principio di induzione. Dimostrazione di $n^n \geq n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ attraverso il principio di induzione. Binomio di Newton $(a + b)^n$: formula, giustificazione della formula, verifica nel caso $n = 2, n = 3$.

Lezione 43-44 (28 ottobre 2020) Nozione di limite di una funzione $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Esempi ed esercizi.

Lezione 45-46 (29 ottobre 2020) Gerarchia degli infiniti. Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$. Teorema ponte: caratterizzazione del limite di una funzione attraverso successioni. Applicazione: il limite di $\sin(1/x)$ per x che tende a 0 non esiste.

Lezione 47-48 (30 ottobre 2020) Teorema di unicità del limite. Teorema dei due carabinieri. Teorema di permanenza del segno. Corollario: monotonia del limite. Teorema di confronto. Limite destro e sinistro di una funzione in un punto. Teorema: una funzione f ammette limite in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se esistono i

limiti destro e sinistro di f in x_0 e tali limiti coincidono. Esempi ed esercizi. Primo limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ e sue conseguenze.

Lezione 49-50 (2 novembre 2020) Verifica che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$ per $a > 0, a \neq 1$. Secondo limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$ per $\beta > 0$. Terzo limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e sue conseguenze.

Lezione 51-52 (3 novembre 2020) Terzo limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ con dimostrazione. Limiti notevoli conseguenti. Esercizi sui limiti. Infiniti/infinitesimi equivalenti e loro utilizzo nel calcolo dei limiti.

Lezione 53-54 (4 novembre 2020) Esercizi sui limiti.

Lezione 55-56 (5 novembre 2020) Funzioni composte, funzioni inverse. Teorema: una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Esercizi.

Lezione 57-58 (6 novembre 2020) Esistenza del limite destro e sinistro in un punto per una funzione monotona. Applicazione: $\lim_{x \rightarrow x_0} \log(x) = \log(x_0)$ per ogni $x_0 > 0$. Definizione di funzione continua. Teorema di permanenza del segno. Algebra delle funzioni continue: continuità della somma, differenza, prodotto, rapporto di funzioni continue. La composizione di funzioni continue è continua. Esempi ed esercizi.

Lezione 59-60 (9 novembre 2020) Esercizi. L'inversa di una funzione continua $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua. Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass. Osservazioni ed esempi.

Lezione 61-62 (10 novembre 2020) Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione). Applicazione al calcolo delle immagini di alcune funzioni. Teorema: la funzione $x \mapsto x^n$ da $[0, +\infty)$ a $[0, +\infty)$ è strettamente monotona e suriettiva, quindi invertibile (con dimostrazione). La funzione inversa è la funzione $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$. Descrizione di vari tipi di punti di discontinuità di una funzione. Nozione di punto di discontinuità eliminabile e di punto di discontinuità di salto.

Lezione 63-64 (11 novembre 2020) Svolgimento di esercizi dal Foglio 15.

Lezione 65-66 (12 novembre 2020) Svolgimento di esercizi dal Foglio 16.

Lezione 67-68 (13 novembre 2020) Rapporto tra funzioni invertibili e funzioni monotone. Calcolo differenziale di una funzione di una variabile: definizione di retta tangente e di derivata di una funzione in un punto. Esempio di funzione non derivabile. Calcolo della derivata di funzioni elementari.

Lezione 69-70 (16 novembre 2020) Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione). Derivata destra, derivata sinistra in un punto.

Lezione 71-72 (17 novembre 2020) Teorema: una funzione derivabile è continua (con dimostrazione). Non vale il viceversa. Algebra delle derivate: derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili (con dimostrazione). Esercizi.

Lezione 73-74 (18 novembre 2020) Derivata di una funzione composta (con accenno alla dimostrazione). Applicazioni ed esempi.

Lezione 75-76 (19 novembre 2020) Derivata di una funzione inversa (con giustificazione euristica della formula e idea geometrica). Applicazioni ed esempi.

Lezione (20 novembre 2020) Simulazione di esonero.

Lezione 77-78 (23 novembre 2020) Punti di massimo e minimi locali, punti stazionari. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Teorema di Rolle (con

dimostrazione). Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per esercizio).

Lezione 79-80 (24 novembre 2020) Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla; una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima.

Lezione 79-80 (24 novembre 2020) Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla; una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima.

Lezione 81-82 (25 novembre 2020) Limite della derivata della funzione f in un punto x_0 vs. derivabilità di f in x_0 . Esempi.

Lezione 83-84 (26 novembre 2020) Esempio: legge della rifrazione. Teoremi di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi.

Lezione 85-86 (27 novembre 2020) Definizione di insieme convesso. Definizione di funzione convessa e concava. Teorema: una funzione convessa è continua. Teorema: caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili in un intervallo. Definizione di punto di flesso. Come fare uno studio qualitativo del grafico di una funzione.

Lezione 87-88 (30 novembre 2020) Esercizi: studio qualitativo del grafico di una funzione, risoluzione di alcuni esercizi del Foglio 18.

Lezione 89-90 (1 dicembre 2020) Approssimazione di funzioni e polinomio di Taylor. Nozione di o piccolo. Teorema: data una funzione f derivabile n volte in un punto x_0 , il polinomio di Taylor P_n è l'unico polinomio di grado n tale che il resto $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$ è un o piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \rightarrow x_0$ (con dimostrazione nel caso $x_0 = 0$ e $n = 2$). Calcolo dei polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari.

Lezione 91-92 (2 dicembre 2020) Introduzione al calcolo integrale per funzioni di una variabile: teoria dell'integrazione vs. teoria della misura. Definizione di funzione (limitata e definita su un intervallo chiuso e limitato) integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann. Classi di funzioni integrabili (su un intervallo chiuso e limitato): funzioni continue; funzioni monotone; funzioni ottenute incollando funzioni integrabili. Risoluzione di alcuni esercizi del Foglio 19.

Lezione 93-94 (3 dicembre 2020) Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'insieme di integrazione, monotonia. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema della media integrale (con dimostrazione).

Lezione 95-96 (4 dicembre 2020) Definizione di primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Lista di alcune primitive elementari. Integrazione per sostituzione.

Lezione 97-98 (7 dicembre 2020) Integrazione di funzioni razionali.

Lezione 99-100 (9 dicembre 2020) Integrazione per parti: esempi. Definizione di integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo limitato.

Calcolo di $\int_0^1 1/x^\alpha dx$ al variare di $\alpha > 0$.

Lezione 101-102 (10 dicembre 2020) Definizione di integrale generalizzato su un intervallo non limitato. Calcolo di $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha dx$ al variare di $\alpha > 0$ Principi di confronto per integrali generalizzati. Applicazioni: la serie armonica $\sum 1/n$ è divergente; la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$ è convergente per ogni $\alpha > 1$.

Lezione 103-104 (11 dicembre 2020) Esercizi su integrali generalizzati.

Lezione 105-106 (14 dicembre 2020) Equazioni differenziali: generalità. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (con dimostrazione). Formula per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esempi.

Lezione 107-108 (15 dicembre 2020) Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ricerca di una soluzione particolare e formula relativa. Esempi. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine e problema di Cauchy: teoremi generali (senza dimostrazione).

Lezione 109-110 (16 dicembre 2020) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea associata e polinomio caratteristico. Esempi.

Lezione 111-112 (17 dicembre 2020) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di non risonanza, caso di risonanza. Esempi.

Lezione 113-114 (18 dicembre 2020) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma $f(t) = e^{at} (k_1 \cos(bt) + k_2 \sin(bt))$ con $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$: caso di non risonanza, caso di risonanza. Esempi.