

# Istituzioni di Matematica I

Laurea Triennale in Scienze Chimiche

Registro Didattico a.a. 2023/2024

21 dicembre 2023

**Lezione 1-2 (25 Settembre 2023)** Gli assiomi dei numeri reali: ordinamento, somma, prodotto e assioma di continuità (Dedekind). Regole di calcolo algebrico in  $\mathbb{R}$  come conseguenza degli assiomi.

**Lezione 3-4 (26 Settembre 2023)** Sottoinsiemi particolari di  $\mathbb{R}$ : i numeri naturali  $\mathbb{N}$ , gli interi relativi  $\mathbb{Z}$ , i razionali  $\mathbb{Q}$ . Dimostrazione del fatto che non esiste  $q \in \mathbb{Q}$  tale che  $q^2 = 2$ .

**Lezione 5-6 (27 Settembre 2023)** Non validità in  $\mathbb{Q}$  dell'assioma di Dedekind. Definizione di  $\mathbb{N}$  come il minimo sottoinsieme induttivo di  $\mathbb{R}$ . Principio di induzione, esempi. Intervalli della retta: notazione. Definizione di insieme limitato superiormente/inferiormente. Definizione di maggiorante e minorante. Definizione di massimo e minimo.

**Lezione 7-8 (28 Settembre 2023)** Proprietà di esistenza del minimo dei maggioranti e del massimo dei minoranti: definizione di estremo superiore e inferiore. Proprietà archimedea. Esempi di calcolo di sup e inf, caratterizzazioni.

**Lezione 9-10 (29 Settembre 2023)** Proprietà di densità dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali. Formula del binomio di Newton e richiami di calcolo combinatorio.

**Lezione 11-12 (2 Ottobre 2023)** Correzione esercizi Foglio 1.

**Lezione 13-14 (3 Ottobre 2023)** Teorema di esistenza delle radici  $n$ -esime. Definizione di modulo di un numero reale e sue proprietà. Disuguaglianza triangolare. Esercizi su disequazioni con il modulo.

**Lezione 15-16 (4 Ottobre 2023)** Funzioni reali di variabile reale: definizione di dominio, codominio, immagine e grafico di una funzione. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biettiva. Definizione di funzione inversa. Relazione tra il grafico di una funzione invertibile e il grafico della sua inversa. Esempi.

**Lezione 17-18 (5 Ottobre 2023)** Funzioni lineari, funzioni quadratiche. Definizione di funzione monotona e strettamente monotona, esempi. La funzione parte intera. Relazione tra stretta monotonia e iniettività. Definizione di funzione (superiormente, inferiormente) limitata. Funzioni potenza a esponente reale: definizione, monotonia e andamento grafico qualitativo.

**Lezione 19-20 (6 Ottobre 2023)** Funzioni esponenziali. Funzioni logaritmiche. Il logaritmo naturale. Funzioni composte. Esempi.

**Lezione 21-22 (9 Ottobre 2023)** Correzione esercizi Foglio 2.

**Lezione 23-24 (10 Ottobre 2023)** Richiami sulla misura in gradi e in radianti di un angolo. Funzioni trigonometriche ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cotan x$ ): definizione, grafici e proprietà. Funzioni trigonometriche inverse:  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ .

**Lezione 25-26 (11 Ottobre 2023)** La funzione  $\arctan x$ . Esempi di disequazioni trigonometriche. Funzioni iperboliche ( $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ): definizione, grafici e loro inverse.

**Lezione 27-28 (12 Ottobre 2023)** Costruzione del campo complesso: definizione di  $\mathbb{C}$ , operazioni di somma e prodotto, proprietà. Esempi. Coniugato di un numero complesso: proprietà. Modulo di un numero complesso: proprietà e disuguaglianza triangolare. Esempi.

**Lezione 29-30 (13 Ottobre 2023)** Forma trigonometrica dei numeri complessi. Interpretazione geometrica del prodotto complesso. Radici ennesime in campo complesso. Esempi. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

**Lezione 31-32 (16 ottobre 2023)** Calcolo delle radici quadrate di un numero complesso. Formula per il calcolo delle radici complesse di una equazione di secondo grado: giustificazione della formula. Successioni numeriche: introduzione, definizione, esempi.

**Lezione 33-34 (17 ottobre 2023)** Definizione di successione inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata. Cosa vuol dire che una successione verifica una proprietà *definitivamente*. Esempi. Definizione di limite finito di una successione. Definizione di successione divergente positivamente o negativamente. Esempi. Definizione di successione irregolare. Teorema di unicità del limite (con dimostrazione).

**Lezione 35-36 (18 ottobre 2023)** Teorema: ogni successione convergente è limitata (con dimostrazione). Definizione di successione monotona. Teorema di regolarità delle successioni monotone. Limiti della successioni  $(n^\alpha)_n$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  e di  $(q^n)_n$  al variare di  $q \in \mathbb{R}$ .

**Lezione 37-38 (19 ottobre 2023)** Applicazione: il limite della successione  $(1 + 1/n)^n$  e il numero di Nepero  $e$  (solo enunciato). Algebra dei limiti e forme indeterminate. Esercizi su limiti di successioni.

**Lezione 39-40 (20 ottobre 2023)** Teorema di permanenza del segno (con dimostrazione). Corollario: monotonia del limite (con dimostrazione). Teorema dei due carabinieri: enunciato e applicazioni. Esercizi del Foglio 3.

**Lezione 41-42 (23 ottobre 2023)** Esercizi sui limiti. Infiniti di ordine superiore, inferiore, dello stesso ordine. Criterio del rapporto: idea della dimostrazione. Applicazioni: gerarchia degli infiniti e alcuni limiti notevoli. Infinitesimi. Esercizi su limiti di successioni.

**Lezione 43-44 (24 ottobre 2023)** Esercizi sui limiti. Definizione di successione infinitesima e ordini di infinitesimo. Serie numeriche: generalità. Esempi di serie: serie armonica, serie armonica generalizzata (di esponente 2), serie geometrica. Esempio della scacchiera. Achille e la tartaruga. Serie geometrica: calcolo del carattere e della somma della serie geometrica.

**Lezione 45-46 (25 ottobre 2023)** Serie di Mengoli, serie telescopiche. Proposizione: se una serie  $\sum a_n$  converge, allora  $a_n \rightarrow 0$ . Non vale il viceversa. Serie a termini non negativi: regolarità delle serie a termini non negativi; criterio del

confronto e del confronto asintotico. Applicazione: la serie armonica generalizzata  $\sum 1/n^\alpha$ . Esempi ed esercizi.

**Lezione 47-48 (26 ottobre 2023)** Serie a termini non negativi: criterio del rapporto e della radice. Esempi ed esercizi.

**Lezione 49-50 (27 ottobre 2023)** Esercizi dei Fogli 3 e 4.

**Lezione 51-52 (30 ottobre 2023)** Serie a termini di segno generico: una serie assolutamente convergente è convergente. Serie a segno alterno: criterio di Leibniz. Esercizi.

**Lezione 53-54 (31 ottobre 2023)** Nozione di limite di una funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Gerarchia degli infiniti. Esempi ed esercizi.

**Lezione 55-56 (2 novembre 2023)** Definizione di limite di una funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Teorema ponte: caratterizzazione del limite di una funzione attraverso successioni. Applicazione: il limite di  $\sin(1/x)$  per  $x$  che tende a 0 non esiste. Teorema di unicità del limite. Algebra dei limiti. Teorema di permanenza del segno.

**Lezione 57-58 (3 novembre 2023)** Esercizi del Foglio 5.

**Lezione 59-60 (6 novembre 2023)** Teorema di permanenza del segno. Corollario: monotonia del limite. Teorema dei due carabinieri. Teorema di confronto. Primo limite notevole  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$  e sue conseguenze. Limite destro e sinistro di una funzione in un punto.

**Lezione 61-62 (7 novembre 2023)** Teorema: una funzione  $f$  ammette limite in un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di  $f$  in  $x_0$  e tali limiti coincidono. Secondo limite notevole  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$  per  $\beta > 0$ . Terzo limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  e sue conseguenze.

**Lezione 63-64 (8 novembre 2023)** Esistenza del limite destro e sinistro in un punto per una funzione monotona. Applicazione:  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$  per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Definizione di funzione continua. Esempi: continuità delle funzioni  $\cos(x)$  e  $\sin(x)$  nei loro domini di definizione.

**Lezione 65-66 (9 novembre 2023)** Esempio: continuità della funzione  $\log(x)$  nel suo dominio di definizione. Teorema di permanenza del segno. Algebra delle funzioni continue: continuità della somma, differenza, prodotto, rapporto. La composizione di funzioni continue è continua. Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione).

**Lezione 67-68 (10 novembre 2023)** Teorema di Weierstrass. Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione). Esercizi.

**Lezione 69-70 (13 novembre 2023)** Applicazioni: calcolo dell'immagine della funzione  $x \mapsto x^n$  definita in  $[0, +\infty)$  se  $n$  è pari, in  $\mathbb{R}$  se  $n$  è dispari; un polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale. Teorema: la funzione  $x \mapsto x^n$  definita in  $[0, +\infty)$  se  $n$  è pari, in  $\mathbb{R}$  se  $n$  è dispari, è strettamente monotona, quindi invertibile. La funzione inversa è la funzione  $f^{-1}(y) := \sqrt[n]{y}$ . Teorema: una funzione strettamente crescente (rispettivamente, decrescente) è invertibile e la sua inversa è strettamente crescente (risp., decrescente). Teorema: una funzione continua definita su un intervallo è invertibile se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è continua (solo enunciato). Osservazioni ed esempi. Esercizi.

**Lezione 71-72 (14 novembre 2023)** Punti di discontinuità di una funzione: possibili casi ed esempi. Cenni alla dimostrazione del Teorema ponte tra limite di funzioni e limiti di successioni. Esercizi.

**Lezione 73-74 (15 novembre 2023)** Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale: definizione di derivata di una funzione in un punto. Calcolo della derivata di funzioni elementari (usando la definizione). Definizione di retta tangente.

**Lezione 75-76 (16 novembre 2023)** Derivata destra, derivata sinistra in un punto. Applicazione: non derivabilità della funzione  $|x|$ . Teorema: una funzione derivabile è continua (con dimostrazione). Non vale il viceversa: la funzione  $|x|$  è continua ma non derivabile in  $x = 0$ . Esercizi.

**Lezione 77-78 (17 novembre 2023)** Algebra delle derivate: derivata della somma, differenza, prodotto, rapporto di due funzioni derivabili (con dimostrazione). Esempi. Esercizi.

**Lezione 79-80 (20 novembre 2023)** Derivata di una funzione composta (con "dimostrazione"). Esempi. Esercizi.

**Lezione 81-82 (21 novembre 2023)** Esonero.

**Lezione 83-84 (22 novembre 2023)** Derivata di una funzione inversa (con giustificazione euristica della formula e idea geometrica). Applicazione: calcolo della derivata delle funzioni  $\log(x)$ ,  $\arctan(x)$  e  $\arcsin(x)$  ( $\arccos(x)$  lasciato per esercizio). Punti di massimo e di minimo locali.

**Lezione 85-86 (23 novembre 2023)** Teorema di Fermat (con dimostrazione). Teorema di Rolle (con dimostrazione) e alcune osservazioni. Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Teorema di Cauchy (dimostrazione per esercizio). Conseguenze del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile in un intervallo è costante se e solo se la sua derivata è identicamente nulla.

**Lezione 87-88 (24 novembre 2023)** Applicazioni del Teorema di Lagrange: una funzione derivabile su un intervallo è crescente (rispettivamente, decrescente) se e solo se la sua derivata è non negativa (risp., non positiva). Come fare uno studio qualitativo del grafico di una funzione e ricerca di massimi e minimi (locali e assoluti) tramite lo studio del segno della derivata prima

**Lezione 89-90 (27 novembre 2023)** Limite della derivata della funzione  $f$  in un punto  $x_0$  vs. derivabilità di  $f$  in  $x_0$  e teorema relativo (con dimostrazione). Teoremi di de l'Hôpital.

**Lezione 91-92 (28 novembre 2023)** Teoremi di de l'Hôpital. Esempi ed esercizi. Definizione di insieme convesso. Definizione di funzione convessa e concava. Teorema: una funzione convessa è continua. Teorema: caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili in un intervallo. Definizione di punto di flesso.

**Lezione 93-94 (29 novembre 2023)** Approssimazione di funzioni e polinomio di Taylor. Nozione di  $o$  piccolo. Teorema: data una funzione  $f$  derivabile  $n$  volte in un punto  $x_0$ , il polinomio di Taylor  $P_n$  è l'unico polinomio di grado  $n$  tale che il resto  $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$  è un  $o$  piccolo di  $(x - x_0)^n$  per  $x \rightarrow x_0$  (enunciato). Calcolo di alcuni limiti usando il polinomio di Taylor. Cenni all'algebra degli  $o$  piccoli.

**Lezione 95-96 (30 novembre 2023)** Teorema: data una funzione  $f$  derivabile  $n$  volte in un punto  $x_0$ , il polinomio di Taylor  $P_n$  è l'unico polinomio di grado  $n$  tale che il resto  $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$  è un  $o$  piccolo di  $(x - x_0)^n$  per  $x \rightarrow x_0$  (con

dimostrazione nel caso  $x_0 = 0$  e  $n = 2$ ). Calcolo di alcuni limiti usando il polinomio di Taylor.

**Lezione 97-98 (1 dicembre 2023)** Introduzione al calcolo integrale per funzioni di una variabile: teoria dell'integrazione vs. teoria della misura. Definizione di funzione (limitata e definita su un intervallo chiuso e limitato) integrabile secondo Riemann e integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

**Lezione 99-100 (6 dicembre 2023)** Classi di funzioni integrabili (su un intervallo chiuso e limitato): funzioni continue; funzioni monotone; funzioni ottenute incollando funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale: linearità, additività rispetto all'insieme di integrazione, monotonia. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann. Teorema della media integrale (con dimostrazione). Esercizi.

**Lezione 101-102 (7 dicembre 2023)** Definizione di primitiva. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Lista di alcune primitive elementari. Integrazione per sostituzione. Esempi e applicazioni.

**Lezione 103-104 (11 dicembre 2023)** Integrazione di funzioni razionali.

**Lezione 105-106 (12 dicembre 2023)** Integrazione per parti. Esercizi.

**Lezione 107-108 (13 dicembre 2023)** Definizione di integrale generalizzato di una funzione non limitata su un intervallo limitato. Calcolo di  $\int_0^1 1/x^\alpha dx$  al variare di  $\alpha > 0$ . Definizione di integrale generalizzato su un intervallo non limitato. Calcolo di  $\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha dx$  al variare di  $\alpha > 0$ . Applicazioni: la serie armonica  $\sum 1/n$  è divergente; la serie armonica generalizzata  $\sum 1/n^\alpha$  è convergente per ogni  $\alpha > 1$ .

**Lezione 109-110 (14 dicembre 2023)** Criteri di integrabilità. Esercizi.

**Lezione 111-112 (15 dicembre 2023)** Equazioni differenziali: generalità. Equazioni differenziali lineari del primo ordine: ogni soluzione è somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (con dimostrazione). Ricerca delle soluzioni di una equazione omogenea: primi esempi.

**Lezione 113-114 (18 dicembre 2023)** Equazioni differenziali lineari del primo ordine: formula per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esempi. Problema di Cauchy.

**Lezione 115-116 (19 dicembre 2023)** Equazioni differenziali lineari del secondo ordine e problema di Cauchy: teoremi generali (senza dimostrazione). Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzioni dell'equazione omogenea associata e polinomio caratteristico.

**Lezione 117-118 (20 dicembre 2023)** Ricerca di una soluzione particolare tramite il metodo di somiglianza. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di non risonanza. Esempi. Termine noto della forma esponenziale per un polinomio: caso di risonanza.