ALGEBRA 2, 16 GENNAIO 2018. SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia G un gruppo di ordine $2^4 \times 7^2$. Dimostrare che G non è semplice.

Soluzione. Sia n_7 il numero dei 7 Sylow. n_7 divide 16 ed è congruo a 1 modulo 7. Può essere solo 1 o 8. Se n_7 =1, allora ci sta un solo 7-Sylow che è normale. Se n_7 =8 ci sono 8 7-Sylow che vengono permutati transitivamente da G per coniugio. Si ottiene dunque un omomorfismo $F : G \to S_8$ non banale e se G fosse semplice esso sarebbe iniettivo. Dunque 7^2 dividerebbe 8! ma questo non è vero.

Esercizio 2. Sia $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Dimostrare che se $\sigma \in Aut(G)$ fissa almeno $p + 1$ elementi, σ è l'identità.

Soluzione. Gli elementi fissati sono un sottogruppo H. Ora H può avere o 1 o p o p^2 elementi. Siccome $|H| > p$ deve essere $|H| = p^2$ ovvero $H = G$.

Esercizio 3. Sia $K \supseteq \mathbb{Q}$ il campo di spezzamento di $x^6 - 3$. Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$. Determinare il gruppo di Galois dell'estensione $K \supseteq \mathbb{Q}$.

Soluzione. Sia

$$\varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

radice del polinomio $x^2 - x + 1$ e radice primitiva sesta di 1. Sia $\alpha = \sqrt[6]{3}$. Le radici di $x^6 - 3$ sono

$$\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha, \varepsilon^3\alpha, \varepsilon^4\alpha, \varepsilon^5\alpha.$$

F è dunque $\mathbb{Q}(\alpha, \varepsilon)$. Ora chiaramente $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ è un'estensione di grado 6 reale e $F = L(\varepsilon) \supsetneq L$ visto che F non è reale. Dato che ε soddisfa un polinomio di grado 2, necessariamente $[F, L] = 2$, da cui

$$[F, \mathbb{Q}] = [F, L][L, \mathbb{Q}] = 12.$$

Il gruppo di Galois G ha dunque 12 elementi.

Sia $\tau \in G$, allora $\tau(\varepsilon)$ è una radice di $x^2 - x + 1$ dunque è ε o il suo coniugato e notiamo che G contiene il coniugio c che fissa α e porta ε nel suo coniugato.

Ora sia $\sigma \in G$ tale che $\sigma(\alpha) = \varepsilon\alpha$. Componendo eventualmente con il coniugio, possiamo assumere che $\sigma(\varepsilon) = (\varepsilon)$ Allora $\sigma^i(\alpha) = \varepsilon^i\alpha$ e σ permuta ciclicamente le radici e fissa ε. Genera dunque un sottogruppo H di ciclico di ordine 6 che fissa $\mathbb{Q}(\varepsilon) \subset F$, ed è normale avendo indice 2.

Inoltre $c\sigma c = \sigma^{-1}$ in quanto $c\sigma c(\alpha) = c\sigma(\alpha) = c(\varepsilon\alpha) = \bar{\varepsilon}\alpha = \varepsilon^5\alpha = \sigma^5(\alpha)$.

Concludiamo che G è il gruppo diedrale D_6.

Esercizio 4. Sia $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

(1) Si dimostri che l'inseme $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$ è una base di L come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.
(2) Si esibisca un elemento $\alpha \in L$ tale che
$$L = \mathbb{Q}(\alpha).$$
(3) Si trovino $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tali che
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}.$$

Soluzione. (1) $\sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{5} \in L$. Scriviamo $L = F(\sqrt{5})$ con $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. $[L : F] = [F : \mathbb{Q}] = 2$. Ne segue che $[L : \mathbb{Q}] = 4]$. Una base di F su $\mathbb{Q}$ è data da $\{1, \sqrt{2}\}$. Una base di L su F è data da $\{1, \sqrt{5}\}$. Dunque una base di L su $\mathbb{Q}$ è data da $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}\sqrt{5}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}\}$.

(2) L è il campo di spezzamento di $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$. Dunque $L \supset \mathbb{Q}$ è di Galois di grado 4. Il gruppo di Galois può essere o ciclico o Klein. Ma $L \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $L \supset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Dunque il gruppo di Galois contiene due sottogruppi distinti di ordine 2 ed è necessariamente il gruppo di Kein $V = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}$ con
$$\sigma_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \sigma_1(\sqrt{5}) = \sqrt{5};$$
$$\sigma_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2},\ \sigma_1(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}.$$
Ora si prenda $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Se $\sigma \in V$, $\sigma(\alpha) = \alpha$ se e solo se $\sigma = e$. Ne segue che $[L : \mathbb{Q}(\alpha)] = 1$ ovvero $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(3) Abbiamo $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 3$. dunque
$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$