

Esercizi di Algebra II

14 Marzo 2017

1) Dimostrare che se un gruppo semplice ha n_p p -Sylow, per un fissato primo p , esso è un sottogruppo di S_{n_p} .

2) Dimostrare che un gruppo di ordine 1000000 non può essere semplice.

3) Si consideri un gruppo G tale che $g^2 = e$ per ogni $g \in G$. Dimostrare che G è abeliano.

4) Si consideri il gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

con $a, b, c \in \mathbb{F}_p$ il campo con p elementi, p primo dispari. Dimostrare che $g^p = e$ per ogni $g \in G$, ma G non è abeliano.

5) Si dimostri che se un gruppo G di ordine nm con $\text{MCD}(m, n) = 1$ contiene esattamente un sottogruppo H di ordine m ed un sottogruppo K di ordine n ,

$$G = H \rtimes K.$$

Se anche K è unico, allora

$$G = H \times K.$$

6) Sia D_n il gruppo diedrale delle simmetrie di un n -agono regolare. Dimostrare che se n è dispari

$$D_{2n} \simeq D_n \times C_2.$$

7) Sia D_n il gruppo diedrale delle simmetrie di un n -agono regolare. Dimostrare che

$$D_n \simeq C_n \rtimes C_2.$$

8) Dimostrare che se $C_n \simeq \mathbb{Z}/n$ è il gruppo ciclico con n elementi. $\text{Aut}(C_n)$ è il gruppo degli elementi invertibili in $\mathbb{Z}/n$. In particolare ha $\phi(n)$ elementi (ϕ la funzione di Eulero).

9) Dimostrare che $\text{Aut}(\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p)$, p -primo è isomorfo a $\text{Gl}(2, \mathbb{F}_p)$ e ha ordine $(p+1)p(p-1)^2$

10) Dimostrare che i gruppi S_3 e $Gl(2, \mathbb{F}_2)$ sono isomorfi. Dedurne che $Aut(S_3)$ e $Aut(\mathbb{F}^2 \times \mathbb{F}^2)$ sono entrambi isomorfi a S_3 .

11) Sia Q il gruppo delle 8 matrici 2×2 complesse

$$\pm 1 := \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm i := \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm j := \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm k := \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Dimostrare che è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne,
- (2) Calcolarne il centro.
- (3) Dimostrare che non è abeliano e non è isomorfo a D_4 .
- (4) Dimostrare che Q non è prodotto semidiretto di 2 suoi sottogruppi propri.
- (5) Dimostrare che $Aut(Q)$ è isomorfo a S_4 .

12) Sia G un gruppo finito e p il minimo primo che divide $|G|$. Dimostrare che se $H < G$ è un sottogruppo di indice p , H è normale.

13) Classificare i gruppi di ordine 99 a meno di isomorfismo.