Esercizi di Algebra II

20 Marzo 2017

1) Si G un gruppo di ordine 3515 e X un insieme di cardinalità 15 su cui G agisce. Dimostrare che l'azione non ha punti fissi se e solo se X ha 3 orbite..

2) Dimostrare che se un grupo G possiede un sottogruppo di indice finito H ($|G/H| < \infty$), allora possiede un sottogruppo normale di indice finito.

3) Supponiamo che G agisca transitivamente su un insieme X.

(1) Dimostrare che se $x, y \in X$ e $y = gx$, $G_y = gG_xg^{-1}$ (G_x lo stabilizzatore di X).

(2) Se $y = gX$, l'applicazione $r_g : X \to X$ definita da $r_g(x) = gx$, porta le G_x orbite in X nelle G_y orbite.

(3) Se G è finito e $Fix(g)$ è l'insieme degli elementi di X fissati da $g \in G$, dimostrare che

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = 1.$$

(4) Dimostrare che se G è finito e $|X| \neq 1$ esiste $g \in G$ che non fissa alcun elemento.

4) Dimostrare che se G è finito e H è un sottogruppo proprio di G esiste un $k \notin \cup_{g\in G} gHg^{-1}$.

Sia G finito che agisce su un insieme finito X. Sia $Fix(g)$ l'insieme degli elementi di X fissati da $g \in G$, dimostrare che

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = |X/G|.$$

5) Sia $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e G il gruppo degli automorfismi del gruppo X. Usando i risultati precedenti dimostrare che

$$\sum_{\substack{a=0,\\ MCD((a,n)=1}}^{n-1} MCD(a-1, n) = \phi(n)d(n)$$

dove $\phi(n)$ è la funzione di Eulero e $d(n)$ il numero di divisori di n.

6) Sia G un gruppo che a agisce su un insieme X. Diremo che G agisce in modo doppiamente transitivo se dati $x_1 \neq x_2 \in X$, $y_1 \neq y_2 \in X$ esiste $g \in G$ tale che $gx_1 = y_1$, e $gx_2 = y_2$. Sotto queste ipotesi, si consideri l'azione di G su $X \times X$ data da $g(z_1, z_2) = (gz_1, gz_2)$ e si dimostri che rispetto a questa azione

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = 2.$$

7) Determinare i gruppi abeliani di ordine 16 a meno di isomorfismo. Per ciascuno di essi e per ogni h divisore di 16 determinare il numero di elementi di ordine h.

8) Determinare i gruppi abeliani di ordine 108 e per ciascuno di essi dire quanti sottogruppi di ordine 3 essi posseggono.

9) Sia $n = p^2m$ con $MCD(p, m) = 1$ e m un numero privo di fattori primi al quadrato. Dimostrare che, a meno di isomorfismo, ci sono due sottogruppi abeliani di ordine n. Se G è un tale gruppo, determinare il numero dei sottogruppi di G di ordine p.

10) Sia G un gruppo abeliano finito. Dimostrare che G è ciclico se e soltanto se ogni suo sottogruppo di Sylow è ciclico.