ALGEBRA I: PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Sia A un insieme. Mostrare che $A \times \emptyset = \emptyset$.

(2) Siano A e B insiemi con $A \neq B$ Mostrare che se Z è tale che $A \times Z = B \times Z$ allora $Z = \emptyset$.

(3) Siano A, B, C insiemi. Mostrare che
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

(4) Siano A, B due insiemi. Verificare se
$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

(5) Si consideri un insieme X. Dato $Y \subset X$, indichiamo con Y' il complementare di Y in X. Verificare se per ogni $A, B \subset X$ risulti
$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(6) Siano $A, B, C \subset X$. Verificare se
$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C')'.$$

(7) Sia $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$. Verificare se
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(X)$;
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset \mathcal{P}(X)$.

(8) Siano A, B insiemi. Verificare se
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(9) Siano A, B, C, D insiemi. Verificare se
- $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$;
- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
- $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.

(10) Sia $f : A \to B$ un'applicazione iniettiva. Verificare se
$$F(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2),$$
per ogni scelta di $A_1, A_2 \subset A$.

(11) Siano X, Y insiemi. Per ogni coppia si sottoinsiemi $A \subset X, B \subset Y$ definiamo il prodotto cartesiano $\chi_A \times \chi_B$ delle funzioni caratteristiche χ_A e χ_B tramite
$$\chi_A \times \chi_B : X \times Y \to \{0, 1\}$$
$$(x, y) \mapsto \chi_A(x) \cdot \chi_B(y).$$
Verificare se
$$\chi_A \times \chi_B = \chi_{A \times B}.$$

(12) Si determini, se esiste, un'inversa per ciascuna delle seguenti applicazioni
$$\begin{aligned} &f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, && x \mapsto 2x + 1; \\ &f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, && x \mapsto 2x + 1; \\ &f_3 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}, && (x, y) \mapsto \min(x, y); \\ &f_4 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2, && (x, y) \mapsto (3x + 4y, 2x + 3y). \end{aligned}$$
Determinare altrimenti, se esistono, delle inverse destre e/o sinistre.

(13) Sia n un numero intero positivo, ed indichiamo con $[n]$ l'insieme $\{1, \ldots, n\}$. Quante sono le applicazioni suriettive $f : [n + 1] \to [n]$?

(14) Dato un intero positivo n, poniamo
$$I_n = \left\{ m \in \mathbb{Z} \middle| \, \frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Dimostrare che $I_2 \cap I_5 = I_{10}$.

(15) Se a e b sono numeri reali $[a, b]$ – risp. $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) – indica l'intervallo chiuso – risp. aperto a destra, aperto a sinistra, aperto – di estremi a e b. Determinare
$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k, \qquad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$$
nei seguenti casi:
- $B_k = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2k\}$.
- $B_k = \{k - 1, k, k + 1\}$.
- $B_k = [3/k, (5k + 2)/k) \cup \{10 + k\}$.
- $B_k = [-1, 3 + 1/k) \cap [5, (5k + 1)/k)$.

(16) Descrivere $A \cap B$ nei seguenti casi:
- A è l'insieme dei numeri naturali pari, B quello dei numeri naturali divisibili per 5;
- $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2t, t \in \mathbb{Z}\}$, B è l'insieme dei numeri primi;
- A è l'insieme delle matrici 2×2 diagonali a coefficienti in $\mathbb{Z}$, B è l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e con determinante uguale a 1.

(17) Dimostrare che, se A, B e C sono insiemi, si ha
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C),$$
dove $\triangle$ indica la differenza simmetrica di insiemi.

(18) Se A e B sono insiemi finiti, dimostrare che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Vedete un modo per generalizzare questa uguaglianza a 3 insiemi (cioè un'uguaglianza del tipo $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \ldots$)?

(19) Determinare quali delle seguenti applicazioni $f : A \to B$ sono iniettive, quali suriettive, quali biiettive.
- A = {mesi dell'anno}, B = {lettere dell'alfabeto italiano},
$$f(x) = \text{ lettera con cui inizia il nome di } x \text{ in italiano;}$$
- A = {persone presenti in aula in questo momento}, B = {mesi dell'anno},
$$f(x) = \text{ mese in cui è nato } x;$$
- $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\quad f(x) = x^2$;
- $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\quad f(x) = x^2$;
- $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^2$;
- $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{C}$, $\quad f(x) = x^2$;
- $A = B = \{1, 2, \ldots, 10\}$,
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è dispari} \\ 12 - x & \text{se } x \text{ è pari} \end{cases}$$

(20) Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione così definita:
$$f(n) = \begin{cases} n + 17 & \text{se 17 divide } n; \\ n & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Verificare che f è biunivoca e determinare l'applicazione inversa.

(21) Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da
$$f((x, y)) = (xy, x + y).$$
Sia inoltre $A = \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Determinare gli insiemi $f^{-1}(f(A))$ e $f(f^{-1}(B))$.

(22) Dare un esempio di applicazioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva, ma almeno una fra f e g non lo sia; e lo stesso con "suriettiva" al posto di "iniettiva".
(23) Elencare tutte le possibili applicazioni di $A = \{a, b, c\}$ in $B = \{0, 1\}$. Mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme F di tutte queste applicazioni con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme delle parti di A.
(24) Trovare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(A \times B)$, l'insieme delle parti di $A \times B$, dove $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.
(25) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = n^3 + 3$. Dire se f sia iniettiva e/o suriettiva.
(26) Sia $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ l'applicazione definita da

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Dire se f sia iniettiva e/o suriettiva. Se è biettiva determinarne l'inversa.
(27) Sono date $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Dire quali di queste affermazioni sono vere e spiegare perché
- Se f e g sono iniettive anche $g \circ f$ è iniettiva.
- Se f e g sono suriettive anche $g \circ f$ è suriettiva.
- Se f e $g \circ f$ sono iniettive allora g è iniettiva.
- Se f e $g \circ f$ sono suriettive allora g è suriettiva.
- Se g e $g \circ f$ sono iniettive allora g è iniettiva.
- Se g e $g \circ f$ sono suriettive allora g è suriettiva.

(28) Sia $A = \{1, 2, 3\}$. Scrivere tutte le funzioni da A in sé.
(29) Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da

$$f(n) = \begin{cases} n + 2 \ \text{ se } n = 3h, \\ n \text{ se } \ n = 3h + 1, \\ n + 1 \text{ se } \ n = 3h + 2. \end{cases}$$

Dimostrare che f è biiettiva e determinarne l'inversa.
(30) Calcolare il numero di applicazioni suriettive dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ all' insieme $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
(31) Sia X un insieme. E' possibile costruire $F : X \to X$ in modo che
- f sia iniettiva ma non suriettiva;
- f sia suriettiva ma non iniettiva;
- f non sia né iniettiva né suriettiva.

Le risposte cambiano se si suppone che l'insieme X sia finito?
(32) Sia X un insieme, $f, g, h : X \to X$ tali che $f \circ g = \mathrm{id}_X, h \circ f = \mathrm{id}_X$. E' vero che $g = h$?
(33) Sia X un insieme, $f, g : X \to X$ tali che $f \circ g = \mathrm{id}_X$. Dimostrare, o confutare con un controesempio, le seguenti affermazioni:
- f è necessariamente invertibile;
- f è necessariamente iniettiva;
- f è necessariamente suriettiva;
- g è necessariamente iniettiva;
- g è necessariamente suriettiva.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: barucci@mat.uniroma1.it, dandrea@mat.uniroma1.it, deconcin@mat.uniroma1.it