ESERCIZI DI ALGEBRA
27 maggio 2010

1. Scrivere come somma diretta di $\mathbb{Z}$-moduli ciclici (ovvero gruppi ciclici) lo $\mathbb{Z}$-modulo (ovvero gruppo abeliano) M generato dagli elementi v_1, v_2, v_3 soddisfacenti alle seguenti relazioni:

   $2v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$

   $5v_1 - 4v_2 + 7v_3 = 0$

2. Ripetere l'esercizio precedente dove le relazioni assegnate sono:

   $3v_1 + 2v_2 + 8v_3 = 0$

   $2v_1 + 4v_3 = 0$

   oppure:

   $v_1 + v_2 = 0$

   $2v_1 = 0$

   $4v_1 + 2v_3 = 0$

   $4v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0$

3. Sia A una matrice $m \times n$ di presentazione per l'R-modulo M (dove R è un anello commutativo unitario). Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   a) Una matrice A' ottenuta da A aggiungendo una colonna di zeri presenta lo stesso modulo M.

   b) Una matrice A' ottenuta da A aggiungendo una riga di zeri presenta lo stesso modulo M.

4. Scrivere come somma diretta di $\mathbb{Z}[i]$-moduli ciclici lo $\mathbb{Z}[i]$-modulo M generato dagli elementi v_1, v_2 soddisfacenti alle seguenti relazioni:

   $(1 + i)v_1 + (2 - i)v_2 = 0$

   $3v_1 + 5iv_2 = 0$

5. Scrivere come somma diretta di $\mathbb{Q}[t]$-moduli ciclici lo $\mathbb{Q}[t]$-modulo M generato dagli elementi v_1, v_2 soddisfacenti alle seguenti relazioni:

   $(t^2 - 3t + 2)v_1 + (t - 1)^3 v_2 = 0$

   $(t - 2)v_1 + (t^2 - 3t + 2)v_2 = 0$

6. Elencare tutti i possibili gruppi abeliani di ordine 140 (ovvero che abbiano 140 elementi), non isomorfi tra loro.