ALGEBRA I: SESTO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Sia J un ideale di B. Mostrare che $\phi^{-1}(J)$ è un ideale di A.

(2) Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. È vero che se I è un ideale di A anche $\phi(I)$ è un ideale di B? Stessa domanda se ϕ è suriettivo.

(3) Sia X un insieme e A un anello. $F(X, A)$ l'insieme delle funzioni da X ad A. Dimostrare che $F(X, A)$ è un anello rispetto alle operazioni definite da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

dove $f, g \in F(X, A), x \in X$.

(4) Sia X un insieme e A un anello. Dato $x \in X$ dimostrare che l'applicazione $ev_x : F(X, A) \to A$ definita da $ev_x(f) = f(x)$ è un omomorfismo di anelli. ev_x è suriettiva?

(5) Sia k un campo. Mostrare che lo spazio vettoriale $k[X_1, ..., X_n]_d$ dei polinomi omogenei di grado d (ovvero combinazioni lineari di monomi nelle X_j di grado esattamente d) ha dimensione $\binom{n+d-1}{d}$.

(6) Sia A un anello commutativo. $M_n(A)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A. Se I è un ideale di A mostrare che $M_n(I)$ l'insieme delle matrici a coefficienti in I, è un ideale di $M_n(A)$.

(7) Sia A un anello commutativo. $I \subset A$ un ideale. Poniamo

$$\sqrt{I} = \{a \in A | \; \exists\, n > 0, a^n \in I\}.$$

Mostrare che $\sqrt{I}$ è un ideale. NB: gli elementi di $\sqrt{(0)}$ si dicono *nilpotenti*, e formano quindi un ideale.

(8) Sia A un anello commutativo. Mostrare che se $a \in A$ è nilpotente, allora $1 + a$ è invertibile. Più in generale, mostrare che se $u \in A$ è invertibile e $a \in A$ è nilpotente, allora $u + a$ è ancora invertibile.

(9) Sia A un anello commutativo. $f(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$. Dimostrare che
   (a) f è invertibile in $A[X]$ se e solo se a_0 è invertibile in A e $a_1, \dots, a_n$ sono nilpotenti in A.
   (b) f è nilpotente in $A[X]$ se e solo se $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono nilpotenti in A.
   (c) f è un divisore di zero in $A[X]$ se e solo se esiste $a \in A$ con $a \neq 0$ tale che $af = 0$.

(10) Sia A un anello. Un sottoinsieme S di A si dice moltiplicativo se dati $s_1, s_2 \in S$ anche $s_1s_2 \in S$.
   (a) Definiamo una relazione su $A \times S$ imponendo che $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ se e solo se esiste $s \in S$ tale che $s(a_1s_2 - a_2s_1) = 0$. Mostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
   (b) Dimostrare che se $0 \in S$ allora ogni coppia in $A \times S$ è equivalente a $(0, 0)$.

(11) Sia A un anello commutativo, S un sottoinsieme moltiplicativo di A con $0 \notin S$, $S^{-1}A$ l'insieme delle classi di equivalenza di $A \times S$ rispetto alle relazione $\sim$ definita nel precedente esercizio.
   (a) Dimostrare che le seguenti operazioni su $S^{-1}A$:

$$[(a, s)] + [(b, t)] = [(at + bs, st)], \qquad [(a, s)][(b, t)] = [(ab, st)],$$

   dove $a, b \in A, s, t \in S$, sono ben definite.
   (b) Dimostrare che rispetto a tali operazioni, $S^{-1}A$ è un anello commutativo con 1 nel quale l'elemento neutro rispetto alla somma è $[(0, s)]$ e l'unità è data dalla classe $[(s, s)]$.
   (c) Dimostrare che l'applicazione $j : A \to S^{-1}A$ definita da $j(a) = [(as, s)]$ è ben definita ed è un omomorfismo.

(12) Sia A un anello commutativo. $f \in A$, $S = \{f^n \,|\, n \geq 0\}$. Dimostrare che S è moltiplicativo e che $S^{-1}A$ è isomorfo all'anello quoziente $A[x]/(xf - 1)$.