ALGEBRA I: SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Data una relazione $\mathcal{R}$ su un insieme X e $x \in X$ definiamo $[x] := \{y \in X | x \mathcal{R} y\}$. Per ognuna delle seguenti relazioni su $\mathbb{Z}$ si determinino $[3], [-3], [6]$.
- $a \mathcal{R} b$ se $a = |b|$.
- $a \mathcal{R} b$ se a divide b.
- $a \mathcal{R} b$ se b divide a o a divide b.
- $a \mathcal{R} b$ se b divide a.

(2) Per ognuna delle seguenti relazioni su $\mathbb{R}^2$ si determinino $[(0, 0)]$ e $[(3, 4)]$.
- $(x, y) \mathcal{R} (z, t)$ se $y = 3t$.
- $(x, y) \mathcal{R} (z, t)$ se $x^2 + 3y^2 = 7z^2 + t^2$.
- $(x, y) \mathcal{R} (z, t)$ se $x = z$ o $y = t$.

(3) Verificare quali delle seguenti relazioni ρ (in cui A è l'insieme su cui sono definite, e x e y sono elementi di A) sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali di equivalenza. Per le relazioni di equivalenza, descrivere l'insieme quoziente A/ρ e scrivere un'applicazione $f : A \to B$ (per un opportuno insieme B) tale che, per ogni x e y di A, $x\rho y$ se e solo se $f(x) = f(y)$.
- $A = \emptyset$, $\rho = A \times A$;
- $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono nati nello stesso anno;
- $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono nati in città diverse;
- $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y sono figli dello stesso padre;
- $A = \{x \mid x$ è un essere umano$\}$, $x\rho y$ se e solo se x e y hanno un genitore in comune;
- $A = \mathbb{R}$, $a \rho b$ se $a = |b|$.
- $A = \mathbb{Q}$, $a \rho b$ se $a - b \in \mathbb{Z}$.
- $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x, y) \rho (z, t)$ se i punti del piano di coordinate (x, y) e (z, t) giacciono su una retta di coefficiente angolare intero.
- $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ se $a \leq c$.
- A è l'usuale piano della geometria euclidea, $x\rho y$ se e solo se x e y sono equidistanti dall'origine;
- A è l'usuale piano della geometria euclidea, $x\rho y$ se e solo se $\overline{xy} < 1$ (dove $\overline{xy}$ è la distanza tra x e y);
- A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y sono parallele;
- A è l'insieme delle rette nel piano, $x\rho y$ se e solo se x e y non sono parallele;
- $A = P(\{1, 2, 3, 4\})$ è l'insieme delle parti di $\{1, 2, 3, 4\}$, $x\rho y$ se e solo se $x \cap y \neq \emptyset$ (si noti che in questo caso x e y sono insiemi);
- $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se $\mathrm{MCD}(x, y) = 1$;
- $A = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$, $x\rho y$ se e solo se il massimo comun divisore degli elementi di x (che qui è una coppia di numeri) è uguale a quello di y;
- $A = \mathbb{Z}$, $x\rho y$ se e solo se x e y non hanno divisori in comune (ad esempio $10 \,\rho\, 9$, mentre $12 \not\rho\, 15$ perché 3 divide sia 12 che 15);
- $A = [0, 1]$, $x\rho y$ se e solo se $|x - y| \in \{0, 1\}$ (questo è un modo complicato di dire una cosa semplice. . .).

(4) Data in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relazione

$$(x_1, y_1) \,\rho\, (x_2, y_2) \iff 3(x_1 - x_2) = 5(y_1 - y_2),$$

- verificare che ρ è di equivalenza;
- determinare la classe di $(1, 1)$;
- dimostrare che l'insieme quoziente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\rho$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Z}$.

(5) Dimostrare che, per qualunque intero $n \geq 0$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

(Suggerimento: per questo e per il prossimo esercizio non è necessario fare calcoli usando l'espressione dei coefficienti binomiali come $n!/k!(n - k)!$, ma solo tenerne presente la definizione combinatoria: $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi che. . . ; 2^n è il numero di sottoinsiemi che. . .)

(6) Quante sono le n-ple composte da 0 e 1 in cui non compaiono mai due 1 consecutivi? (Per esempio, per $n = 3$, ce ne sono cinque: 000, 001, 010, 100 e 101). E quante sono le n-ple della stessa forma in cui sia fissato il numero k di cifre 1?

(7) I numeri di Fibonacci sono definiti nel modo seguente:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{per} \quad n > 1$$

Dimostrare che, per $n \geq 0$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

(8) Spiegare perchè la seguente dimostrazione sia sbagliata.
Sia X un insieme $\mathcal{R}$ una relazione che sia simmetrica e transitiva allora $\mathcal{R}$ è riflessiva.
Dim.: Sia $x \in X$. Si prenda $y \in X$ tale che $x \mathcal{R} y$. Per simmetria $y \mathcal{R} x$. Dunque per transitività $x \mathcal{R} x$.

(9) Sia X un insieme non vuoto, $\{E_i\}_{i \in I}$ una famiglia di relazioni di equivalenza — viste come sottoinsiemi di $X \times X$ — indicizzate da un insieme I. Dimostrare che $\cap_{i \in I} E_i$ è di equivalenza. Che si può dire di $\cup_{i \in I} E_i$?

(10) Per ognuna delle seguenti partizioni descrivere la corrispondente relazione di equivalenza.
- Partizione $\mathcal{P}$ di $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ data da
$$\mathcal{P} = \{\{1, 3\}; \{2, 4, 5\}\}.$$
- Partizione $\mathcal{P}$ di $\mathbb{R}$ data da $\mathcal{P} = \{T_x\}$ con $T_x = \{x, -x\}$ con $x \in \mathbb{R}$.
- Partizione $\mathcal{P}$ di $\mathbb{R}$ data dagli intervalli $\{[n, n+1)\}$ con n intero.

(11) Si consideri l'insieme $P(X)$ delle parti di $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sia $P_k \subset P(X)$ la collezione dei sottoinsiemi di X che possiedono esattamente k elementi, $k = 1, \ldots, n$. Dimostrare che i P_k costituiscono una partizione di $P(X)$ ed esibire una relazione di equivalenza in $P(X)$ che induca tale partizione.

(12) Un insieme X con una relazione di ordine $\leq$ si dirà un poset (partially ordered set). Un elemento $x \in X$ si dice un minimo (risp. un massimo) se $x \leq y$ (risp. $y \leq x$) per ogni $y \in X$. Fare esempi di posets dotati di
- Minimo e massimo.
- Minimo ma non massimo.
- Massimo ma non minimo.
- Nessuno dei due.

(13) Sia $A = \{a, b, c\}$. Ad ogni relazione $\mathcal{R}$ su A associamo la terna (r, s, t, u), dove

$$r = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathcal{R} \text{ è riflessiva} \\ 0 \text{ altrimenti,} \end{cases} \qquad s = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathcal{R} \text{ è simmetrica} \\ 0 \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathcal{R} \text{ è transitiva} \\ 0 \text{ altrimenti,} \end{cases} \qquad u = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathcal{R} \text{ è antisimmetrica} \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

- Quante sono tutte le possibili relazioni su A?
- Per ogni possibile quaterna (r, s, t, u) (quante sono?) dare un esempio di relazione su A che ha (r, s, t, u) come quaterna associata, se esiste, oppure dimostrare che non ne esistono.

  Definiamo una relazione $\sim$ sull'insieme R di tutte le relazioni su A nel seguente modo: date due relazioni $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ su A, poniamo $\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2$ se e solo se $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ hanno la stessa quaterna associata.
- Dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
- Quante sono le classi di equivalenza determinate da $\sim$?
- Descrivere la classe di equivalenza delle relazioni associate alla quaterna $(1, 1, 1, 0)$.

(14) Dimostrare che la relazione $\sim$ sull'insieme X è di equivalenza nei seguenti casi:
- $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b$ se e solo se $2b + 5a$ è un multiplo di 7.
- $X = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. $p \sim q$ se e solo se q/p è una potenza di 2.
- $X = \mathbb{R}$. $x \sim y$ se e solo se $\cos x = \cos y$.

Per ciascuna delle relazioni precedenti, descrivere inoltre esplicitamente le classi di equivalenza.

(15) Sia $A = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x] \mid a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}\}$ l'insieme dei polinomi di grado ≤ 2 con coefficienti interi compresi tra 0 e 9. Definiamo su A la relazione $\sim$ nel seguente modo: se $p(x), q(x) \in A$, allora $p(x) \sim q(x)$ se e solo se il polinomio $p(x) - q(x)$ si annulla in $x = -1$.
- Dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
- Determinare quante sono le classi di equivalenza determinate da $\sim$.

(16) Sia $A \subset \mathbb{Z}$ un sottoinsieme dei numeri interi. Definiamo la relazione di divisibilità su A nel seguente modo: dati $a, b \in A$, diciamo che a divide b, e scriviamo $a|b$, se b è multiplo di a, ovvero se esiste un intero c tale che $b = ac$.
- Mostrare che la relazione di divisibilità su $\mathbb{Z}$ non è una relazione d'ordine.
- Dimostrare che la stessa relazione sull'insieme $\mathbb{N}^+$ degli interi positivi è una relazione d'ordine.

[Alcuni esercizi sono stati presi dai fogli dello scorso anno preparati da A. Fiorentino e F. Incitti]

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"