ALGEBRA I: TERZO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Costruire una biiezione tra l'intervallo $[0;1]$ e il quadrato $[0;1] \times [0;1]$

(2) Questo esercizio consiste in una serie di passi che conducono alla dimostrazione del punto (e).

  (a) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{P}_2$ dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$ è numerabile.

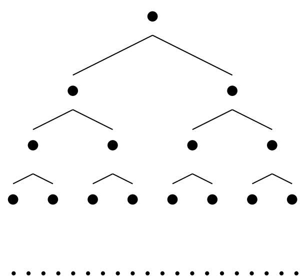
  (b) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{P}_h$ dei polinomi di grado $\leq h$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$ è numerabile.

  (c) Dimostrare che se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \}$ è una successione di insiemi numerabili disgiunti, allora
$$A \cup_{i=1}^{\infty} A_i$$
è numerabile.

  (d) Dimostrare che se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \}$ è una successione di insiemi numerabili, allora
$$A \cup_{i=1}^{\infty} A_i$$
è numerabile.

  (e) Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomi a coefficienti razionali è numerabile.

(3) Consideriamo l'albero definito iterativamente come nel disegno:



ovvero da ogni nodo partono due rami.

Dimostrare che la cardinalità dei rami di tale albero non è numerabile.

(4) Dimostrare che per ogni naturale $n \geq 1$ $\mathbb{N}^n$ ha cardinalità numerabile.

(5) Verificare che
$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$$
e che
$$|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = |2^{\mathbb{R}}|.$$

(6) Dimostrare che:

  (a) $12 + 23 + \ + n(n+1) = n(n+1)(n+2)$.

  (b) $1 + 8 + 27 + \ldots n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

  (c) $1 + 2n < 3^n$ per $n > 1$.

(7) Quante sono le n-ple composte da 0 e 1 in cui non compaiono mai due 1 consecutivi? (Per esempio, per $n = 3$, ce ne sono cinque: 000, 001, 010, 100 e 101). E quante sono le n-ple della stessa forma in cui sia fissato il numero k di cifre 1?

(8) I numeri di Fibonacci sono definiti nel modo seguente:
$$F_0 = 0, \ \ F_1 = 1, \ \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \ \text{per } \ n > 1$$
Dimostrare che, per $n \geq 0$, si ha
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

(9) Dimostrare che n rette generiche dividono il piano in $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioni.

(10) Mostrare che
   (a) $5^{2n-1}+1$ è divisibile per 6.
   (b) $x^n - y^n$ è divisibile per $x-y$.

(11) Mostrare che n^2+n+41 à primo per $n = 1, 2 \dots 40$, ma non per ogni $n \geq 1$.

(12) Sia F_n l'ennesimo numero di Fibonacci. DImostrare che se x_0 è una radice del polinomio x^2+x-1 allora $x^{2n} = F_{2n-1} - xF_{2n}$.

(13) Sia $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Determinare l'applicazione $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ che soddisfa

$$f(1) = 1,$$

e per ogni intero $n > 1$

$$f(n) = 1 + \sum_{1 \leq k < n} kf(k).$$

(14) Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(x+ky) = \frac{(n+1)(2x+ny)}{2}.$$

(15) Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$$z = 3+3i, \quad w = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i;$$

calcolare poi, nella forma più opportuna, z^3, $z \cdot w$, $\sqrt[5]{z}$.

(16) Un numero complesso z si dice radice dell'unità se $z^n = 1$, per qualche $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Quali dei seguenti numeri complessi sono radici dell'unità? Di quelli che lo sono, trovare l'ordine come radici dell'unità.
   (a) $-i$;
   (b) $1+i$;
   (c) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$;
   (d) $\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4)$;
   (e) $\frac{1}{4}(\pi + i\sqrt{16-\pi^2})$.

(17) Sull'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si consideri la relazione ρ definita da

$$z\,\rho\,w \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0 \text{ tale che } z = \alpha\, w + (2+i)(1-\alpha).$$

Stabilire se ρ è una relazione di equivalenza.

(18) Dimostrare che se ω è la radice n-ma primitiva dell'unità $\cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$, allora per ogni k che non sia multiplo di n si ha

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k} = 0.$$

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"