ALGEBRA I: QUARTO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Sia ρ la relazione definita su $\mathbb{R}$ per cui $x\rho y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza, individuarne le classi di equivalenza e dedurre che $\mathbb{R}$ è unione disgiunta di sottoinsiemi numerabili. Qual è la cardinalità dell'insieme quoziente $\mathbb{R}/\rho$?

(2) Sia $\mathcal{U} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ è aperto.}\}$ Dimostrare che $|\mathcal{U}| = |\mathbb{R}|$.

(3) Sia $\mathrm{S}(\mathbb{N})$ la famiglia di tutte le permutazioni dell'insieme $\mathbb{N}$. Mostrare che $|\,\mathrm{S}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

(4) Utilizzando l'algoritmo euclideo, determinare il MCD delle seguenti coppie di numeri:
- $(20, 56)$;
- $(119, 14)$;
- $(1111, 11109)$;
- $(742, 168)$;
- $(34, 21)$.
- $(17172, 2332)$.

Per ogni coppia (a, b) fra le precedenti, trovare $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\text{MCD}(a, b) = ax + by.$$

(5) Se F_n è l'n-mo numero di Fibonacci, quanto vale $\text{MCD}(F_n, F_{n+1})$? Dimostrarlo per induzione, usando l'algoritmo euclideo.

(6) Trovare, se possibile, le soluzioni intere delle seguenti equazioni:

$$20x + 56y = 3;\ 20x + 56y = 30;\ 20x - 56y = 0.$$

(7) Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto & 10x + 15y. \end{array}$$

- Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.
- Determinare $Im(f)$.
- Determinare $f^{-1}(25)$ e $f^{-1}(25) \cap \mathbb{N}^2$.

(8) Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto & 1234x + 4321y. \end{array}$$

- Dire se g è iniettiva e/o suriettiva.
- Determinare, se esistono, le inverse destra o sinistra per g.
- Determinare $g^{-1}(2)$.

(9) Dimostrare la seguente variante della divisione euclidea: se m e n sono due interi con $n \neq 0$, allora sono univocamente determinati due interi q e r con $-|n|/2 < r \leq |n|/2$ tali che $m = nq + r$.

(10) Dimostrare che, dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si ha $\text{mcm}(a, b) = ab/\text{MCD}(a, b)$.

(11) Dimostrare che per ogni numero naturale $n > 0$ esistono n numeri consecutivi.

(12) Si dimostri che l'insieme delle matrici 3×3 della forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

è chiuso rispetto a somma e prodotto di matrici ed è dunque un anello. Si discuta se esso sia o meno commutativo.

(13) Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{n + m\sqrt{-5} |\ n, n \in \mathbb{Z}\}$. Si dimostri che
- 3 è irriducibile in tale anello.
- 3 non è primo in tale anello (si usi l'identità $9 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$.)

(14) Per ogni intero n fra 2 e 12, si determinino tutti gli interi positivi tali minori od uguali ad n e primi con n.

(15) Si dimostri che se a e b sono primi con n anche ab lo è. Inoltre conoscendo x_1, x_2 e y_1, y_2 tali che

$$x_1 a + x_2 n = y_1 b + y_2 n = 1$$

si determinino z_1, z_2 tali che

$$z_1 ab + z_2 n = 1.$$

(16) Si dimostri che dati interi $a_1, \ldots a_m$ e interi positivi $h_1, \ldots, h_m$, qualunque sia n,
$$a_1 n^{h_1} + \ldots + a_m n^{h_m} \equiv (a_1 + \ldots + a_m) n \mod 2.$$
(17) Si dimostri che $37n^{32} + 7n^{72}$ è un multiplo di 22 per ogni scelta di $n \in \mathbb{N}$.

(18) Si risolva il sistema di congruenze
$$\begin{cases} 2x \equiv 46826^{12105} & \mod 15 \\ 5x \equiv 2 & \mod 21 \end{cases}$$
(19) Si dimostri che la successione di interi (a_n) definita da $a_n = n!^2$ per ogni $n \geq 0$ soddisfa la ricorsione $a_h = 1 + \sum_{s=1}^{h} (s^2 - 1) a_{s-1}$

(20) Determinare, se esiste l'inverso di 132 modulo 811.

(21) Trovare, se esiste un intero $h < 783$ tale che $456h$ sia un multiplo di 783

(22) Trovare un criterio di divisibilità per 13.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"