ALGEBRA I: SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Consideriamo la semiretta $S \subset \mathbb{R}$ dei numeri negativi. Definire una corrispondenza biunivoca fra S e $\mathbb{R}$.

(2) In $\mathbb{R}^2$ si consideri la seguente relazione $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se esiste un numero reale x con $(a, b) = x(c, d)$. Dimostrare che $(0, 0)$ è in relazione con qualunque altra coppia e che tale relazione non è di equivalenza.
b) Dimostrare che se si prende la stessa relazione in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ la relazione è di equivalenza e determinarne le classi di equivalalenza.

(3) Definire il massimo comun divisore d di n interi $a_1, a_2, \dots a_n$. e far vedere che esistono interi $z_1, \dots, z_n$ tali che $d = a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n$ e che m è un intero combinazione lineare di $a_1, \dots a_n$ se e solo se d divide m.

(4) Si trovino il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo dei numeri 2093 e 3731. Si scriva il massimo comun divisore come combinazione lineare a coefficienti interi dei due numeri.

(5) Dati due interi a e b sia m=mcm(a.b). Si dimostri che $0 = \alpha n + \beta m$ con α e β interi, allora m/b divide α e m/a divide β.

(6) discutere la compatibilità e trovare eventuali soluzioni delle seguenti equazioni diofantee

$$6 = 15x + 21y, \quad 34 = 68x + 12y.$$

(7) Dimostrare che se $f : A \to B$, f è iniettiva se e solo se la relazione di equivalenza associata ad f è la relazione identica $a\mathcal{R}b$ se e solo se $a = b$.

(8) Dimostrare che un insieme con 4 elementi ha 15 relazioni di equivalenza.

(9) Dimostrare che se $f : A \to B$, f è costante se e solo se la relazione di equivalenza associata ad f è la relazione banale $a\mathcal{R}b\ \forall a, b \in A$.

(10) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x) = (\cos x, \sin x)$$

Determinare la relazione di equivalenza associata ad f.

(11) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x) = (x^2, x^3 - x)$$

Determinare la relazione di equivalenza associata ad f.

(12) Calcolare il numero di partizioni dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con 4 parti non vuote.

(13) Consideriamo la funzione $F : \mathbb{N} \times N \to \mathbb{N} \times N$ definita da

$$f(n, m) = (mcm(n, m), MCD(n, m))$$

Si dica se è iniettiva , nel caso si costruisca g con $gf = id$. Se f è suriettiva e, nel caso, si costruisca g con $fg = id$.

(14) Dimostrare che se x e y sono due interi dispari, allora $x^2 + y^2$ non è un quadrato.

(15) Si trovino tutte le soluzioni intere del sistema lineare

$$\begin{cases} 5267x \equiv & 561^{34489} & \text{mod } 15 \\ 45x \equiv & 36 & \text{mod } 21 \\ 2x \equiv & 45 & \text{mod } 7 \end{cases}$$

(16) Discutere la compatibilità e determinare le eventuali soluzioni intere dell'equazione
$$3kx + 175y = 5$$
al variare del parametro k.

(17) (a) Quante terne (x, y, z) di numeri interi maggiori o uguali a 0 soddisfano l'equazione $15 = x + y + z$?
(b) In quante di queste terne sia x che y sono maggiori o uguali a 1?
(c) In quante di queste terne si ha che x o y (o entrambi) sono maggiori o uguali a 1?

(18) In $\mathbb{Z}_{72}$ denotiamo con a una delle classi di 5, 21, 34 45. Di ciascuna di esse si dica se è o meno invertibile in $\mathbb{Z}_{72}$. Se lo è si trovi una classe b tale che $ba = 1$ se non si trovi una classe b tale che $ba = 0$.

(19) Si considerino i sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{N}$ definiti da
$$A = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ è un quadrato}\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} | n \equiv 3 \bmod 4\}.$$
Determinare $A \cap B$.

(20) Si definisca la funzione $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f((x, y)) = 3x^2 - 4y$. Determinare la relazione di equivalenza su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ad essa associata. Determinare se f è un omomorfismo da $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +)$ a $(\mathbb{Q}, +)$.

(21) Si definisca l'applicazione $g : \mathbb{Z}_{13} \to: \mathbb{Z}_{13}$ definita da $g(x) = x^5$. dimostrare che g è biunivoca e determinarne l'inversa.

(22) Sia p un primo dispari e $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ l'applicazione $f(z) = z^6$. Dimostrare che essa non è suriettiva.

(23) Si trovino tutte le soluzioni del sistema lineare
$$\begin{cases} x \equiv & 4571^{34516} & \bmod 3 \\ x \equiv & 4 & \bmod 46 \\ 42x \equiv & 51 & \bmod 11 \end{cases}$$

(24) Si determini la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita ricorsivamente da $f(1) = 1$, $f(n) = \sum_{h=1}^{n-1} ha_h$.

(25) Si consideri la relazione ρ su $\mathbb{Q}$ definita da $a\rho b$ se $a - b$ è un intero pari. Dimostrare che tale relazioni è di equivalenza. Dimostrare che se $a\rho b$ e $c\rho d$ andche $a + c\rho c + d$ e che dato comunque $a \in \mathbb{Q}$ esiste un intero n con $na\rho 0$.

(26) Siano $(A, \leq)$ e $(B, \leq)$ due insiemi non vuoti totalmente ordinati consideriamo su $A \times B$ la relazione d'ordine prodotto (definita da $(a, b) \leq_{\text{prod}} (a', b')$ se $a \leq a'$ e $b \leq b'$). Dimostrare che $(A \times B, \leq_{\text{prod}}$ è totalmente ordinato se e solo se o A o B hanno un solo elemento.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"