ALGEBRA

Esercizi - 29 aprile 2010

1. Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Sia J un ideale di B. Mostrare che $\phi^{-1}(J)$ è un ideale di A.

2. Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. È vero che se I è un ideale di A anche $\phi(I)$ è un ideale di B? Stessa domanda se ϕ è suriettivo.

3. Sia X un insieme e A un anello. $F(X, A)$ l'insieme delle funzioni da X ad A. Dimostrare che $F(X, A)$ è un anello rispetto alle operazioni definite da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

dove $f, g \in F(X, A), x \in X$.

4. Sia X un insieme e A un anello. Dato $x \in X$ dimostrare che l'applicazione $ev_x : F(X, A) \to A$ definita da $ev_x(f) = f(x)$ è un omomorfismo di anelli. ev_x è suriettiva?

5. Sia A un anello commutativo. $M_n(A)$ l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A. Se I è un ideale di A mostrare che $M_n(I)$ l'insieme delle matrici a coefficienti in I, è un ideale di $M_n(A)$.

6. Consideriamo il polinomio $f(x) = x^4 - 3x^3 - x + 3$.
   (a) Decomporre in fattori irriducibili $f(x)$ su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
   (b) Stabilire se in $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ la classe individuata da $x^4 - 2x^3 - x + 2$ è un divisore dello zero.

7. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + x + \bar{3}\rangle$.
   (a) Quanti elementi ha A?
   (b) Trovare rappresentanti canonici per le classi
      - $\overline{f(x)} = \overline{x^3 + \bar{4}x + \bar{3}}$,
      - $\overline{g(x)} = \overline{x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{4}}$,
      - $\overline{h(x)} = \overline{x^2 + \bar{2}x + \bar{4}}$,
      - $\overline{k(x)} = \overline{(x^2 + x + \bar{3})^2}$

      di A.
   (c) Calcolare, quando è possibile, gli inversi degli elementi del punto precedente.

8. (a) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{Z}_7$ l'anello $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 - a)$ è un campo.
   (b) Dire per quali valori di a l'elemento $\overline{x^5 + x^4}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 - a)$ e trovarne esplicitamente l'inverso almeno in un caso.

9. Si consideri il polinomio $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Fattorizzare $f(x)$ come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Determinare un polinomio irriducibile $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ in modo che $f(x)$ ammetta quattro radici nel campo $\mathbb{Q}[x]/(g(x))$.

10. Discutere le seguenti equazioni nelle incognite U, V e, nel caso abbiano soluzioni, trovarle

   (a) $(x^2+1)U + x^3V = 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) $x^2U + x^3V = x^4 + 5$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.

   (c) $(x^3+1)U + (x^3+x^2+x+1)V = x^2+1$in $\mathbb{Z}_2[x]$.

11. Discutere l'equazione

$$(x^3+3x+1)U \equiv 1(mod\ x^4+1) \text{ in } \mathbb{R}[x].$$

12. SIa F un campo e $f(x)$ un polinomio non irriducibile in $F[x]$. Dimostrare che $F[x]/(f(x)$ ha divisori di zero.

13. SIa F un campo e $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ un polinomio in $F[x]$. La derivata di $f(x)$ è il polinomio

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots a_1.$$

   DImostrare che dati due polinomi $f(x), g(x)$ si ha

$$f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

14. SIa F un campo e $f(x)$ un polinomio non irriducibile in $F[x]$. Diciamo che un elemento $a \in K$ con K campo contenente F è una radice multipla di $f(x)$ se $(x-a)^2$ divide $f(x)$ in $K[x]$. Dimostrare che $f(x)$ ha una radice multipla se e solo se

$$\text{MCD } (f(x), f'(x)) \neq 1.$$

   Dimostrare che se $f(x)$ è irriducibile non ha radici multiple.