ALGEBRA

Esercizi

1. Sia A l'anello delle funzioni reali sull'intervallo $(0, 1)$ che siano derivabili. Dimostrare che A è un anello e che non è un dominio.

   Dimostrare che le funzioni in A che sono identicamente nulle su $(\frac{1}{2}, 1)$ sono un ideale.

2. a) Provare che $\mathbb{Z}[x]/5\mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}_5[x]$.

   b) Provare che $\mathbb{Z}[x]/x\mathbb{Z}[x] \cong \mathbb{Z}$.

   c) Descrivere gli ideali di $\mathbb{Z}[x]$ contenenti $x\mathbb{Z}[x]$ e stabilire quali di essi sono massimali.

3. Provare che nell'anello dei polinomi $K[x]$, dove K è un campo, se I è l'ideale generato da $f(x)$ e J è l'ideale generato da $g(x)$ allora

   - $I \cap J$ è generato da $\mathrm{mcm}(f(x), g(x))$.
   - $I + J$ è generato da $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.

4. Dimostrare che un dominio d'integrità finito è un campo.

5. Consideriamo l'omomorfismo di anelli

   $$\phi : \mathbb{Q}[x] \to M_2(\mathbb{Q})$$

   definito ponendo

   $$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Trovare $\mathrm{Ker}(\phi)$ e $\mathrm{Im}(\phi)$. Applicando il teorema di omomorfismo, mostrare che $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

6. Siano R e T due anelli, sia I un ideale di R e J un ideale di T. Mostrare che:

   a) $I \times J$ è un ideale di $R \times T$.

   b) $\frac{R \times T}{I \times J} \cong R/I \times T/J$.

   c) Stabilire se tutti gli ideali di $R \times T$ sono della forma $I \times J$, per qualche ideale I di R e J di T.

7. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, trovare un quoziente e un resto della divisione euclidea di $5 + 2i$ per $2 - 3i$.

8. Fattorizzare i seguenti elementi di $\mathbb{Z}[i]$ nel prodotto di fattori irriducibili:

   $$4 + i, \quad 5 - 3i, \quad -13, \quad 7 + 2i$$

9. Nell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss, trovare il massimo comun divisore di 175 per $4i - 3$.

10. Sia A un anello commutativo. $I \subset A$ un ideale. Dimostrare che l'insieme delle matrici

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

a coefficienti in A è un anello rispetto al prodotto righe per colonne. Dimostrare che il sottoinsime $J \subset B$ degli elementi in cui $a \in I$ è un ideale tale che B/J è isomorfo a A/I.

11. Dimostrare che il campo dei quozienti dell'anello $\mathbb{Z}[i]$ degli interi di Gauss è isomorfo al compo $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$.

12. Sia $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, radice del polinomio x^2+x+1 (notare che $\alpha^3 = 1$). Si consideri l'insieme

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{n + m\alpha, n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

   (a) Si dimostri che $Z[\alpha]$ è un sottoanello.
   (b) Sia $v : \mathbb{Z}[\alpha] \to \mathbb{Z}$ definita da $v(n+m\alpha) = n^2 + m^2 - nm$. SI dimostri che che v prende valori positivi sugli elementi non nulli.
   (c) Si dimostri che v rende $\mathbb{Z}[\alpha]$ un anello euclideo.

13. Si consideri nell'anello $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{m + ni\sqrt{5}$
$n, m \in \mathbb{Z}\}$ la fattorizzazione

$$6 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5}).$$

Dimostrare che 3 è irriducibile in A ma non divide ne $(1+i\sqrt{5})$ ne $(1-i\sqrt{5})$.

A è euclideo?