PROVA SCRITTA DI ALGEBRA – soluzioni

13 Aprile 2010

1) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

Soluzione: A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, quindi $|A| \le |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$. L'applicazione $f : \mathbb{R} \to A$ definita da $f(x) = (x, x)$ è inoltre iniettiva, e quindi $|\mathbb{R}| \le |A|$. In conclusione, $|A| = |\mathbb{R}|$, e quindi A ha la potenza del continuo.

2) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da

$$f(a, b) = (ab, a + b)$$

Si dica se è iniettiva o suriettiva. Si determini la relazione di equivalenza definita da f mostrando che ogni classe di equivalenza possiede al più due elementi.
Soluzione: si nota subito come f non sia iniettiva, dal momento che ad esempio $f(1, 2) = f(2, 1)$. f non è neanche suriettiva, poiché ad esempio $(1, c)$ appartiene all'immagine di f solo se $c = 2$: se $ab = 1$, con $a, b \in \mathbb{N}$, allora $a = b = 1$ e quindi $a + b = 2$.
Per quanto riguarda l'ultimo punto, dire che $f(a, b) = (p, s)$ equivale a dire che a, b sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - sx + p = 0$. Ma allora $f(a, b) = f(c, d)$ se e solo se $\{a, b\} = \{c, d\}$, cioè se $(a, b) = (c, d)$ oppure $(a, b) = (d, c)$.

3) Dimostrare che se $r \in \mathbb{R}$ è tale che $r + 1/r$ è intero anche $r^n + 1/r^n$ è intero per ogni $n \ge 1$.
Soluzione: per induzione (forte) su $n \ge 1$, la base dell'induzione essendo garantita dall'ipotesi.
Si ha

$$\left(r + \frac{1}{r}\right)\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) = \left(r^{n+1} + \frac{1}{r^{n+1}}\right) + \left(r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

Per ipotesi induttiva

$$r + \frac{1}{r}, \qquad r^n + \frac{1}{r^n}, \qquad r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-1}},$$

sono tutti interi, e quindi lo è anche la differenza tra il prodotto dei primi due e il terzo.

4) Si trovino tutte le soluzioni intere del sistema lineare

$$\begin{cases} 4x \equiv & 207084^{17749719} & \mod 21 \\ 4817x \equiv & 43 & \mod 5 \\ 3x \equiv & 12 & \mod 15 \end{cases}$$

Soluzione: iniziamo con l'applicare alcune utili semplificazioni. Si vede subito che $4817 \equiv 2, 43 \equiv 3 \mod 5$, quindi la seconda congruenza diventa $2x \equiv 3 \mod 5$. Moltiplicando entrambi i membri per $3 = 2^{-1}$ si ottiene $x \equiv 4 \mod 5$.

Nella terza congruenza, 3 *divide tutti i numeri in gioco. Semplificando, si ottiene* $x \equiv 4 \mod 5$*. Le ultime due congruenze sono pertanto equivalenti, e ne possiamo eliminare una.*

Per quanto riguarda la prima congruenza, dalla divisione con resto $207084 = 9861 \cdot 12 + 3$*, si ottiene* $207084 \equiv 3 \mod 21$*. Bisogna stare attenti, poiché* $MCD(3, 21) = 3$*, e quindi non possiamo concludere che* $3^{\phi(21)} \equiv 1 \mod 21$*.*

Le potenze di 207084 *modulo* 21 *possono essere calcolate riducendo modulo* 3 *e modulo* 7*:*

$$207084 \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow 207084^n \equiv 0 \mod 3$$

per ogni $n > 0$*. Poiché* $\phi(7) = 6$*, e* $207084 \equiv 3 \mod 7$ *è invertibile, abbiamo* $207084^6 \equiv 1 \mod 7$ *e quindi*

$$207084^{6n} \equiv 1 \mod 7.$$

Ma $17749719 = 6 \cdot 2958286 + 3$ *e quindi* $207084^{17749719} \equiv 27 \equiv 6 \mod 7$*. Da*

$$\begin{cases} 207084^{17749719} \equiv 6 \mod 7 \\ 207084^{17749719} \equiv 0 \mod 3 \end{cases}$$

si ottiene $207084^{17749719} \equiv 6 \mod 21$*. In conclusione, la prima congruenza si riscrive come* $4x \equiv 6 \mod 21$ *o equivalentemente, moltiplicando per l'inverso*

$$4^{-1} \equiv -5 \equiv 16,$$

come $x \equiv 12 \mod 21$*. Il sistema è quindi equivalente a*

$$\begin{cases} x \equiv & 12 & \mod 21 \\ x \equiv & 4 & \mod 5 \end{cases}$$

Si vede subito che $x = 54$ *risolve il sistema. Per il teorema cinese del resto la soluzione è unica modulo* $105 = 21 \cdot 5$*, e quindi si ottiene* $x \equiv 54 \mod 105$*.*