Secondo compito. Proposte e soluzioni

Esercizio 1. Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema ammette soluzioni (e calcolarle)

$$\begin{cases} 3x \equiv 11 \mod (7)\,, \\ 10x \equiv 8 \mod (6)\,, \\ ax \equiv 3 \mod (5) \end{cases}$$

Soluzione. *Dato che $5, 6$ e 7 sono mutualmente coprimi, il sistema ha soluzione se e soltanto se ciascuna equazione ha soluzione. Ora le prime due sono compatibili e la terza lo è se e soltanto se $a \neq 0 \mod .5$. In tal caso prendiamo b in modo che $ab \equiv 1 \mod 5$. Il sistema diventa,*

$$\begin{cases} 3x \equiv 11 \mod (7)\,, \\ 5x \equiv 4 \mod (3)\,, \\ x \equiv 3b \mod (5) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \equiv -1 \mod (7)\,, \\ x \equiv -1 \mod (3)\,, \\ x \equiv 3b \mod (5) \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si deduce $x = -1+21t$. Dall'ultima $t = 3b+1+5h$ e dunque

$$x = -1 + 21(3b + 1) + 105h = 20 + 63b + 105h.$$

Esercizio 2. Sia G un gruppo; poniamo $D = \{(g, g) \mid g \in G\}$

(1) Dimostrare che D è un sottogruppo di $G \times G$.
(2) Dimostrare che D è un sottogruppo normale di $G \times G$ se e solo se G è abeliano.
(3) Dimostrare che se G è abeliano, allora $G \times G/D \cong G$.

Soluzione. *Siano $g, h \in G$.*

Sia ha $(g, g)(h^{-1}, h^{-1}) = (gh^{-1}, gh^{-1}) \in D$ e (1) segue.

(2) Se G è abeliano D è normale. Sia ora D normale. $(h, e)(g, g)(h^{-1}, e) = (hgh^{-1}, g) \in D$. Dunque $g = hgh^{-1}$ ovvero $gh = hg$.

(3) Sia G abeliano; definiamo

$$\psi : G \times G \to G$$

mediante

$$\psi((g, h)) = gh^{-1}$$

ψ è un omomorfismo. ψ è suriettivo dato che $\psi((g, e)) = g$ e $(g, h) \in Ker\psi$ se e sole se $gh^{-1} = e$ ovvero $g = h$ ovvero $(g, h) \in D$.

Esercizio 3. Siano $p > q$ primi e G un gruppo non-abeliano di ordine pq. Provare che q divide $p - 1$.

Soluzione. *G non è abeliano e se consideriamo il numero n_p dei suoi p-Sylow, n_p deve dividere q e quindi $n_p \leq q < p$ e $n_p \equiv 1 \mod p$. Ne segue che $n_p = 1$ e dunque c'è un solo p-Sylow H che è normale.*

Ora supponiamo ci sia anche un solo q-Sylow K che è quindi normale. Se $h \in H$ e $k \in K$ $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$ ma anche $hkh^{-1}k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1}) = \in H$. Quindi

$$hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$$

e $hk = kh$. Ne segue $G = H \times K$ è abeliano e ciclico di ordine pq.

Quindi $n_q > 1$ e deve dividere p. Necessariamente $n_q = p$ ma $n_q \equiv 1 \mod q$ e quindi $p - 1$ è divisibile per q.

Esercizio 4. Si determinino gli ideali dell'anello $\mathbb{Z}[i]$ contenenti $45i - 27$ e $24 + 6i$.

Soluzione. $45i - 27 = 3^2(1+i)(1+4i)$ *e* $24+6i = 6(4+i) = 3(1+i)^2(1-4i)$. *Ne segue che $MCD(45i - 27, 24 + 6i) = 3(1 + i)$ e dato che sia 3 che $1 + i$ sono primi in $\mathbb{Z}i]$, gli ideali che contengono $45i - 27$ e $24 + 6i$ sono*

$$I_1 = (3) \quad I_2 = (1 + i) \quad I_3 = (3(1 + i)).$$

Esercizio 5. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 4.$$

Si calcoli il discriminante di $f(x)$ e si dertmini il suo gruppo di Galois.

Soluzione. *Per usare l'usuale formula del discriminante dobbiamo eliminare il coefficiente di x^2. Per fare questo facciamo la sostituzione $x = t - 1$. Otteniamo*

$$f(x) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 + 3t^2 - 6t + 3 + 3t - 3 - 4 = t^3 - 5.$$

I due polinomi $f(x)$ e $t^3 - 5$ hanno le stesso discriminante $D = -27 \times 25 = -675$. Ora -675 non è un quadrato e $f(x)$ è irriducibile in quanto $t^3 - 5$ è irriducibile. Ne segue che $f(x)$ ha gruppo di Galois S_3.

Esercizio 6. Dire se i quozienti $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ e $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ sono isomorfi e, nel caso affermativo, esibire un isomorfismo.

Soluzione. *I due polinomi $x^2 + 2x + 2$ e $x^2 + 1$ non hanno radici in $\mathbb{Z}_3$ e sono dunque irriducibili. Ne segue che sia $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ che*

$\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ *sono campi con* 9 *elementi e dunque isomorfi. Ora consideriamo l'automorfismo*

$$\gamma : \mathbb{Z}_3[x] \to \mathbb{Z}_3[x]$$

definito da $\gamma(f(x)) = f(x-1)$ *per ogni* $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$.

$$\gamma(x^2+2x+2) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2+1$$

Dunque $\gamma((x^2+2x+2)) = (x^2+1)$ *e* γ *induce un isomorfismo*

$$\overline{\gamma} : \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+2x+2) \to \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1).$$