ESONERO DI ALGEBRA 17 GENNAIO 2019

SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia G un gruppo di ordine 392. Dimostrare che G non è semplice.

Risulta $392 = 2^3 7^2$, *pertanto il* 7*-Sylow* H *ha indice* 8*. L'azione di* G *sui laterali di* H *induce un omomorfismo* $\rho : G \to S_8$ *che non può essere iniettivo, perché* 392 *non divide* 8!*. Dunque* $\ker \rho$ *è un sottogruppo normale non banale di* G*, che pertanto non è semplice.*

Esercizio 2. Dimostrare che S_4 non contiene sottogruppi abeliani con 8 elementi.

I sottogruppi di ordine 8 *in* S_4 *sono i* 2*-Sylow, dunque sono tutti coniugati, in particolare isomorfi. Se prendiamo il gruppo* D_4 *delle simmetrie di un quadrato* Q*, ogni suo elemento permuta i vertici di* Q *e li fissa tutti se e solo è l'identità. Otteniamo un omomorfismo iniettivo di* D_4 *in* S_4 *e quindi ogni sottogruppo di ordine 8 in* S_4 *non è abeliano in quanto isomorfo a* D_4*.*

Esercizio 3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 14x^3 - 8x^2 + 10x - 2.$$

Si decomponga $f(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}/3[x]$ e $\mathbb{Z}/5[x]$.

$f(x)$ *è irriducibile su* $\mathbb{Q}$ *per il criterio di Eisenstein (applicabile con* $p = 2$*), mentre si fattorizza come* $f(x) = (x+1)(x+2)(x^2+2x+2)$ *in* $\mathbb{Z}/3[x]$ *e come* $f(x) = (x+2)(x+4)^3$ *in* $\mathbb{Z}/5[x]$*.*

Esercizio 4. Sia I l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $20 + 35i$ e $10 - 45i$. Determinare gli ideale primi che lo contengono.

Gli ideali cercati sono quelli generati dai fattori primi di $MCD(20 + 35i, 10-45i)$*. Osserviamo che* $20+35i = 5(4+7i) = (2+i)(2-i)(4+7i), 10-45i = 5(2-9i) = (2+i)(2-i)(2-9i)$*. Ne segue che fra i fattori primi ci sono quelli che dividono 5 ovvero* $1+2i$ *e* $1-2i$*. Dobbiamo considerare ora quelli che dividono* $MCD(4+7i, 2-9i)$*.*

$||4+7i|| = 65 = 5 \times 13$ *e* $||2-i|| = 85 = 5 \times 17$*. Dato che* 13 *e* 17 *sono coprimi,* $MCD(4+7i, 2-9i)$ *divide* 5*. Ma i divisori di 5 li abbiamo già presi e quindi gli ideali primi che contengono* I *sono quelli generati da* $1+2i$ *e* $1-2i$*.*

Esercizio 5. Si consideri il campo $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Si determini $[L : \mathbb{Q}]$ e si trovino un elemento primitivo e una base di L su $\mathbb{Q}$.

Osserviamo che $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(i)$. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *è reale dunque non contiene* i *quindi*

$$L \supsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supsetneq \mathbb{Q}.$$

Essendo $\sqrt{2}$ *radice di* $x^2 - 2$ *e* i *di* $x^2 + 1$ *le estensioni* $L \supsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supsetneq \mathbb{Q}$ *hanno entrambe grado 2. Pertanto* $[L : \mathbb{Q}] = 4$ *e una base di* L *su* $\mathbb{Q}$ *è data da* $1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2}$. *Ora*

$$(x-\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}-i)(x+\sqrt{2}+i) = (x^2+3-2\sqrt{2}x)(x^2+3+2\sqrt{2}x) = x^4 - 2x^2 + 9$$

Questo polinomio è irriducibile su $\mathbb{Q}$. *In effetti non ha radici razionali e neanche fattori razionali di grado 2.*

Dunque x^4-2x^2+9 *è il polinomio minimo di* $\sqrt{2}+i$ *che è quindi primitivo.*

Esercizio 6. Sia K un campo e $K(\alpha) \supset K$ un'estensione tale che $[K(\alpha) : K]$ è dispari. Dimostrare che $K(\alpha^2) = K(\alpha)$.

Risulta $[K(\alpha) : K] = [K(\alpha) : K(\alpha^2)][K(\alpha^2) : K]$. *Inoltre* $[K(\alpha) : K(\alpha^2)] \leq 2$, *perché* α *è radice del polinomio* $x^2-\alpha^2 \in K(\alpha^2)[x]$. *La relazione precedente e l'ipotesi che* $[K(\alpha) : K]$ *è dispari implicano* $[K(\alpha) : K(\alpha^2)] = 1$, *ovvero* $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.