Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2014-2015 , 17/12/2014.

Secondo esonero

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Avete 1 ora e 45 minuti di tempo a disposizione**.
- Soltanto nei punti dove è scritto di **calcolare esplicitamente** la soluzione bisogna svolgere i calcoli e dare la soluzione al più come numero frazionario a/b.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

ESERCIZIO 1. Considerare le variabili aleatorie X e Y definite sulle stesso spazio campionario, con X a valori in $\{-1, 3\}$ e Y a valori in $\{-2, 0, 1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-2	0	1
-1	$1/6$	$1/6$	$1/6$
3	$2/6$	$1/6$	0

(cioè $p_{X,Y}(-1,-2) = 1/6$, $p_{X,Y}(-1,0) = 1/6$, ...).

(a) Determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y, la funzione di distribuzione di Y.
(b) Calcolare $Var(X - 3Y)$.

ESERCIZIO 2. Arianna e il suo papà si recano alle giostre. In un banco c'e' un'urna con 20 palline numerate da 1 a 20 e si puo' fare il seguente gioco. Pagando 2 euro si estrae una pallina a caso: se esce 1 si vince un peluche di Peppa pig, se esce 2 si vince un monopoli e se esce 3 si vince il libro "Calcolo delle Probabilità" di S.M. Ross, se esce un altro numero non si vince niente. Dopo il gioco la pallina estratta viene reinserita. Si considerino i seguenti 4 scenari:

(a) Arianna vuole ripetere questo gioco fino a quando vince un regalo. Calcolare esplicitamente media e varianza del numero di euro pagati dal papà per accontentare la figlia.

(b) Arianna vuole ripetere questo gioco fino a quando vince 2 regali. Calcolare esplicitamente media e varianza del numero di euro pagati dal papà per accontentare la figlia.

(c) Arianna è una bimba molto viziata e vuole ripetere questo gioco fino ad avere almeno 2 regali di tipo diverso. Calcolare esplicitamente media e varianza del numero di euro pagati dal papà per accontentare la figlia.

(d) Arianna ripete il gioco 10 volte. Calcolare esplicitamente media e varianza del numero di regali vinti.

ESERCIZIO 3 Un'urna contiene 10 palline rosse, 4 palline verdi e 2 palline gialle. Fabio estrae 2 palline senza rimpiazzo, dopodiché Matteo estrae dall'urna (contenente le palline rimanenti) 2 palline senza rimpiazzo.
Sia X il numero di palline rosse estratte da Fabio e Y il numero di palline rosse estratte da Matteo.

(a) Dare una formula per la densità congiunta delle variabili X e Y.

(b) Dire se X e Y sono indipendenti, giustificando la risposta.

1. TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
(a)

$$p_X(a) = \begin{cases} \frac{3}{6} & a = -1, \\ \frac{3}{6} & a = 3, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases} \qquad p_Y(a) = \begin{cases} \frac{3}{6} & a = -2\,, \\ \frac{2}{6} & a = 0\,, \\ \frac{1}{6} & a = 1\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,, \end{cases}$$

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & a < -2\,, \\ \frac{3}{6} & -2 \le a < 0\,, \\ \frac{5}{6} & 0 \le a < 1\,, \\ 1 & a \ge 1\,. \end{cases}$$

(b) $Var(X-3Y) = Var(X) + Var(-3Y) + 2Cov(X,-3Y) = Var(X) + 9Var(Y) - 6Cov(X,Y)$.
$E(X^2) = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}3^2 = (1+9)/2 = 5$. $E(X) = (-1+3)/2 = 1$. Quindi $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 1 = 4$.
$E(Y^2) = (3/6)(-2)^2 + (2/6)0^2 + (1/6)1^2 = (3/6)4 + (1/6) = 13/6$. $E(Y) =$

$(3/6)(-2) + (2/6)0 + (1/6)1 = -5/6$. Quindi $Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 13/6 - 25/36 = 53/36$.
$E(XY) = (-1)(-2)(1/6)-1(1/6)+3(-2)(2/6) = -11/6$. Quindi $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -11/6 - 1(-5/6) = -1$. In conclusione

$$\begin{aligned} Var(X-3Y) &= Var(X) + 9Var(Y) - 6Cov(X,Y) = 4 + 53/36 - 6(-1) \\ &= 10 + 9 \cdot 53/36 = 10 + 53/4 = 93/4 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sia X il costo pagato e Y il numero di partite giocate. Allora $X = 2Y$, quindi $E(X) = 2E(Y)$ e $Var(X) = 4Var(Y)$.

(a) In questo caso Y è v.a. geometrica di parametro $p = 3/20$. Quindi $E(Y) = 1/p = 20/3$ e $Var(Y) = (1-p)/p^2 = \frac{17}{20}\frac{20^2}{3^2} = \frac{17 \cdot 20}{3^2} = \frac{340}{9}$. La soluzione è quindi

$$E(X) = 2E(Y) = \boxed{\frac{40}{3}}, \qquad Var(X) = 4Var(Y) = \boxed{\frac{1360}{9}}.$$

(b) Y è v.a. binomiale negativa di parametri $r = 2$ e $p = 3/20$. Quindi$E(Y) = r/p = 40/3$ e $Var(Y) = r(1-p)/p^2 = 2\frac{340}{9} = \frac{680}{9}$.
Concludiamo che

$$E(X) = 2E(Y) = \boxed{80/3}, \qquad Var(X) = 4Var(Y) = 4\frac{680}{9} = \boxed{\frac{2720}{9}}.$$

(c) $Y = Y_1 + Y_2$ dove Y_1 è il numero di partite giocate per avere un regalo e Y_2 è il numero di partite giocate per avere un regalo diverso dal primo. Y_1 è v.a. geometrica di parametro 3/20, mentre Y_2 è v.a. geometrica di parametro 2/20 (se il primo regalo è stato ad es. il monopoli, arianna continua a giocare fino a quando non escono i numeri 1,3). Y_1 e Y_2 sono indipendenti. Abbiamo $E(Y_1) = 20/3$, $Var(Y_1) = \frac{340}{9}$, $E(Y_2) = 10$, $Var(Y_2) = \frac{9}{10}100^2 = 90$. Quindi

$$E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = \frac{20}{3} + 10 = \frac{50}{3}$$

$$Var(Y) = Var(Y_1) + Var(Y_2) = \frac{340}{9} + 90 = \frac{1150}{9}$$

da cui otteniamo

$$E(X) = 2E(Y) = \boxed{\frac{100}{3}}, \qquad Var(X) = 4Var(Y) = \boxed{\frac{4600}{9}}.$$

(d) Sia Z il numero di regali vinti. $Z = Bin(10, 3/20)$, quindi $E(Z) = 10(3/20) = \boxed{3/2}$ e $Var(Z) = 10(3/20)(17/20) = \boxed{51/40}$

ESERCIZIO 3 (a) Abbiamo

$$p_{X,Y}(a,b) = \begin{cases} \frac{\binom{10}{a}\binom{6}{2-a}\binom{10-a}{b}\binom{4+a}{2-b}}{\binom{16}{2}\binom{14}{2}} & \text{se } a, b \geq 0 \text{ interi con } a \leq 2,\ b \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti $p_{X,Y}(a,b) = P(X = a, Y = b) = P(X = a)P(X = b|X = a)$ la calcolo come segue. Matteo ha $\binom{16}{2}$ modi per estrarre le 2 palline e ha $\binom{10}{a}\binom{6}{2-a}$ modi per estrarre a palline rosse e $2-a$ palline non rosse. Quindi $P(X = a) = \frac{\binom{10}{a}\binom{6}{2-a}}{\binom{16}{2}}$. Dopo restano nell'urna 14 palline di cui $10-a$ rosse e $4+a$ non rosse. Quindi Fabio ha $\binom{14}{2}$ modi per estrarre 2 palline, ha $\binom{10-a}{b}$ modi per estrarre 2 palline rosse, e ha $\binom{4+a}{2-b}$ modi di estrarre 2 palline non rosse. Quindi $P(X = b|X = a) = \frac{\binom{10-a}{b}\binom{4+a}{2-b}}{\binom{14}{2}}$.

(b) X, Y non sono indipendenti. Infatti $P(Y = 0|X = 0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}}$ mentre $P(Y = 0|X = 2) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}}$. Se X, Y fossero indipendenti, allora $\{Y = 0\}$ e $\{X = 0\}$ sarebbero eventi indipendenti, quindi $P(Y = 0|X = 0) = P(Y = 0)$. Ma anche $\{Y = 0\}$ e $\{X = 2\}$ sarebbero eventi indipendenti, quindi $P(Y = 0|X = 2) = P(Y = 0)$. Ne deriva che dovremmo avere $P(Y = 0|X = 0) = P(Y = 0|X = 2)$, cosa non vera dato che

$$P(Y = 0|X = 0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} \neq \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = P(Y = 0|X = 2)\,.$$