

PROCESSI STOCASTICI 18/06/2015, ESAME SCRITTO

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Avete 2 ore di tempo a disposizione.
- **MOTIVARE CHIARAMENTE I PROCEDIMENTI E I RISULTATI PROPOSTI**

ESERCIZIO 1. Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 2/6 & 3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare le classi comunicanti indicando quali sono chiuse e quali no.
- (b) Determinare gli stati ricorrenti, gli stati transienti e gli stati assorbenti.
- (c) Determinare le distribuzioni invarianti.
- (d) Si consideri la catena di Markov con distribuzione iniziale uniforme. Calcolare la probabilità che la catena rivisiti almeno una volta lo stato iniziale.
- (e) Si consideri la catena di Markov con stato iniziale 1.
Sia $T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{2, 3\}\}$. Provare che $\mathbb{P}_1(T < +\infty) = 1$ e calcolare $\mathbb{P}(X_T = X_{T+1}, T < +\infty)$.

ESERCIZIO 2. Pierpaolo ha 2 figurine della Juve e 1 figurina della Roma. Suo fratello Lorenzo ha 1 figurina della Juve e 2 figurine della Roma. Iniziano a scambiarsi le figurine con la seguente regola: Pierpaolo sceglie a caso una figurina tra le sue 3, Lorenzo sceglie a caso una figurina tra le sue 3, e infine si scambiano le figurine che hanno scelto. Pierpaolo è tifoso della Roma.

- (a) Dire se esiste il limite, per $n \rightarrow \infty$, della probabilità che dopo n scambi Pierpaolo abbia figurine tutte della Roma.
- (b) Calcolare il valore atteso del numero di scambi effettuati fino a quando Pierpaolo si ritrova con solo figurine della Roma.
- (c) Se dopo uno scambio Pierpaolo ha solo figurine della Juventus, Pierpaolo si mette a piangere. Dare una stima approssimata del numero di volte che Pierpaolo si è messo a piangere se ha effettuato con suo fratello 1000 scambi di figurine (giustificando la risposta).

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (a) Classi comunicanti chiuse: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$. Classi comunicanti non chiuse: $\{6, 7\}$.

(b) Essendo I finito gli stati ricorrenti sono tutti e soli quelli delle c.c. chiuse, gli stati transienti sono tutti e soli quelli delle c.c. non chiuse. quindi $1, 2, 3, 4, 5$ sono ricorrenti, mentre $6, 7$ sono transienti. Non vi sono stati assorbenti.

(c) La matrice irriducibile $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ ha un'unica distribuzione invariante

data da $(3/11, 4/11, 4/11)$. La matrice irriducibile $\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ha un'unica distribuzione invariante data da $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$. Le distribuzioni invarianti sono quindi tutte e sole le seguenti:

$$\left(\frac{3\alpha}{11}, \frac{4\alpha}{11}, \frac{4\alpha}{11}, \frac{3(1-\alpha)}{5}, \frac{2(1-\alpha)}{5}, 0, 0 \right), \quad \alpha \in [0, 1].$$

(d) Sia $T_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$. Condizionando a X_0 ho che la prob. p cercata è data da

$$p = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{7} \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$$

Essendo $1, 2, \dots, 5$ ricorrenti ho $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ per $i = 1, 2, \dots, 5$.

Supponiamo di partire in 6. Condizionando al primo passo e usando la proprietà di Markov al tempo 1, abbiamo (vedi sotto)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_6(T_6 < \infty) &= (1/6)\mathbb{P}_5(T_6 < \infty) + (2/6) + (3/6)\mathbb{P}_7(T_6 < \infty) \\ &= (1/6)0 + (2/6) + (3/6)h_7 = 5/6. \end{aligned}$$

Abbiamo usato il seguente risultato. Posto $h_i = \mathbb{P}_i(\exists n \geq 0 : X_n = 6)$ vale

$$h_6 = 1, \quad h_7 = h_6/2 + h_7/2, \quad h_i = 0 \quad \forall i \neq 6, 7$$

Quindi $h_6 = h_7 = 1$.

Se parto in 7, condizionato al primo passo, ho (vedi sotto)

$$\mathbb{P}_7(T_7 < \infty) = (1/2)\mathbb{P}_6(T_7 < \infty) + (1/2) = (1/2)h'_6 + (1/2) = (1/2)(3/4) + (1/2) = \frac{7}{8}.$$

Posto $h'_i = \mathbb{P}_i(\exists n \geq 0 : X_n = 7)$ vale

$$h'_7 = 1, \quad h'_6 = (1/6)0 + (2/6)h'_6 + (3/6)h'_7, \quad h'_i = 0 \quad \forall i \neq 6, 7$$

Pertanto $h'_6 = 3/4$.

In conclusione

$$p = \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \frac{5}{6} + \frac{1}{7} \frac{7}{8} = ..$$

(e) Partendo da 1 ho $\{T = \infty\} = \{X_n = 1 \forall n \geq 1\}$ quindi $P(T = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^n = 0$ (si formalizza con teorema di successione monotone di eventi).

Per simmetria ho $P(X_T = 2, T < \infty) = P(X_T = 3, T < \infty)$ quindi deve essere $P(X_T = 2, T < \infty) = P(X_T = 3, T < \infty) = 1/2$. Ho

$$\begin{aligned} P(X_T = X_{T+1}, T < \infty) \\ &= P(X_T = X_{T+1}, X_T = 2, T < \infty) + P(X_T = X_{T+1}, X_T = 3, T < \infty) \\ &= P(X_T = X_{T+1} | X_T = 2, T < \infty) P(X_T = 2, T < \infty) \\ &\quad + P(X_T = X_{T+1} | X_T = 3, T < \infty) P(X_T = 3, T < \infty) \\ &= P(X_T = X_{T+1} | X_T = 2, T < \infty)/2 + P(X_T = X_{T+1} | X_T = 3, T < \infty)/2 \end{aligned}$$

Siccome T è tempo d'arresto, per proprietà di Markov forte ho

$$\begin{aligned} P(X_T = X_{T+1} | X_T = 2, T < \infty)/2 + P(X_T = X_{T+1} | X_T = 3, T < \infty)/2 \\ = P_2(X_1 = 2)/2 + P_3(X_1 = 3)/2 = (1/2)/2 + (3/4)/2 = 5/8. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Conosciamo la partizione di figurine tra Pierpaolo e Lorenzo dopo n scambi se conosciamo il numero X_n di figurine della Roma possedute da Pierpi dopo n scambi. Infatti, se $X_n = k$, allora dopo n scambi Pierpi ha k figurine della Roma e $3 - k$ della Juve, mentre Lori ha $3 - k$ figurine della Roma e k figurine della Juve (infatti in tutto vi devono essere 3 figurine della Roma e 3 della Juve). Lo spazio degli stati di $(X_n)_{n \geq 0}$ è dato da $I = \{0, 1, 2, 3\}$. La distribuzione iniziale è δ_1 . Calcoliamo la matrice di transizione.

Se Pierpi ha 0 carte della Roma, con prob. 1 dopo lo scambio Pierpi ha 1 carta della Roma.

Supponiamo ora che Pierpi abbia 1 carta della Roma: Pierpi ha 1R, 2J e Lori ha 1J, 2R.

- Con prob. $\frac{1}{3} \frac{1}{3}$ Pierpi sceglie R e Lori sceglie J, alla fine Pierpi avrebbe 0R, 3J.
- Con prob. $\frac{2}{3} \frac{2}{3}$ Pierpi sceglie J e Lori sceglie R, alla fine Pierpi avrebbe 2R, 1J.
- Resta il caso che Pierpi e Lori scelgano carte della stessa squadra, in tal caso dopo lo scambio Pierpi avrebbe ancora 1R, 2J.

Supponiamo che Pierpi abbia 2 carte della Roma: Pierpi ha 2R, 1J e Lori ha 2J, 1R.

- Con prob. $\frac{1}{3} \frac{1}{3}$ Pierpi sceglie J e Lori sceglie R, alla fine Pierpi avrebbe 3R, 0J.
- Con prob. $\frac{2}{3} \frac{2}{3}$ Pierpi sceglie R e Lori sceglie J, alla fine Pierpi avrebbe 1R, 2J.
- Resta il caso che Pierpi e Lori scelgano carte della stessa squadra, in tal caso dopo lo scambio Pierpi avrebbe ancora 2R, 1J.

Se Pierpi ha 3 carte della Roma, con prob. 1 dopo lo scambio Pierpi ha 2 carte della Roma.

In conclusione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) La matrice P è irriducibile e aperiodica ($P_{1,1} > 0$). Essendo I finito essa ha un'unica distribuzione invariante π e per il teorema di convergenza all'equilibrio $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_1(X_n = 3) = \pi(3)$. Risolvo il sistema $\pi P = \pi$ imponendo che π abbia massa 1 e ottengo

$$\pi = \left(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20} \right)$$

Quindi il limite esiste ed è $1/20$.

(b) Sia $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$. Sia $k_i = \mathbb{E}_i(T)$. Sappiamo che

$$\begin{cases} k_0 = k_1 + 1 \\ k_1 = \frac{k_0}{9} + \frac{4k_1}{9} + \frac{4k_2}{9} + 1 \\ k_2 = \frac{4k_1}{9} + \frac{4k_2}{9} + \frac{k_3}{9} + 1 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo $k_0 = 45/2$, $k_1 = 43/2$ e $k_2 = 19$. La risposta è data da k_1 : $43/2$.

(c) Sia $f : I \rightarrow \{0, 1\}$ la funzione $f(0) = 1$, $f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Dopo n scambi Pierpi ha pianto $f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n) + f(X_{n+1})$ volte.

P è irriducibile, I è finito. Applico teorema ergodico e ottengo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n) + f(X_{n+1})}{n} = \pi(f) = \sum_{i \in I} f(i)\pi(i) = \pi(0) = 1/20$$

Dopo 1000 scambi pierpi dovrebbe aver pianto circa $1000(1/20) = 50$ volte