PROCESSI STOCASTICI 05/02/2015, ESAME SCRITTO

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Avete 2 ore di tempo a disposizione.
- **MOTIVARE CHIARAMENTE I PROCEDIMENTI E I RISULTATI PROPOSTI**

ESERCIZIO 1. Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1,2,3,4,5,6\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare le classi comunicanti indicando quali sono chiuse e quali no.
(b) Determinare gli stati ricorrenti, gli stati transienti e gli stati assorbenti.
(c) Determinare le distribuzioni invarianti.

ESERCIZIO 2. Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ la passeggiata semplice simmetrica su $\mathbb{Z}$ con stato iniziale 0. Scriviamo $5\mathbb{Z}$ per l'insieme $\{5k : k \in \mathbb{Z}\}$. Definiamo le variabili aleatorie $T_0, T_1, T_2, \dots$ come $T_0 := 0$ e

$$T_{k+1} := \inf\{n > T_k : X_n \in 5\mathbb{Z}\}, \qquad \forall k \geq 0.$$

Se $T_k < \infty$ per ogni $k \in \{0,1,2,\dots\}$, allora definiamo $Y_n := X_{T_n}$ per ogni $n \in \{0,1,2,\dots\}$. Se $T_k = \infty$ per qualche $k \in \{0,1,2,\dots\}$, allora definiamo $Y_n := 0$ per ogni $n \in \{0,1,2,\dots\}$.

(a) Provare che $P(T_k < \infty \ \forall k \in \{0,1,2,\dots\}) = 1$
(b) Calcolare $P(Y_1 = -5)$, $P(Y_1 = 0)$, $P(Y_1 = 5)$.
(c) Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $(Y_k)_{k\geq 0}$ è una catena di Markov, determinarne distribuzione iniziale e matrice di transizione.

ESERCIZIO 3. Si consideri il gruppo quoziente $I = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ degli interi modulo 8. Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ su I per cui $X_0 = 0$ e tale $P(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = 2/3$, $P(X_{n+1} = x-1 | X_n = x) = 1/3$ (le somme $x+1$ e $x-1$ sono intese modulo 8).

(a) Per ogni $j \in I$ dire se il limite $\lim_{n\to\infty} P(X_{2n} = j)$ esiste giustificando la risposta, ed in caso affermativo calcolarlo.
(a) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $T := \inf\{n \geq 1 : X_n = 3\}$

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1.

(a) $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5\}$ classi comunicanti (c.c.) chiuse. $\{6\}$ classe comunicante non chiusa.

(b) Essendo I finito ho : c.c. di i è chiusa $\Rightarrow$ i è ricorrente; c.c. di i è non chiusa $\Rightarrow$ i è transiente. Quindi 1,2,3,4,5 sono ricorrenti, 6 è transiente. 5 è stato assorbente.

(c) Da facili calcoli (da mettere nella discussione) l'unica distribuzione invariante con supporto in $\{1,2\}$ è data da $(1/2,1/2,0,0,0,0)$, l'unica distribuzione invariante con supporto in $\{3,4\}$ è data da $(0,0,1/4,3/4,0,0)$, l'unica distribuzione invariante con supporto in $\{5\}$ è data da $(0,0,0,0,1,0)$. Per quanto visto a teoria, le distribuzioni invarianti sono tutte e sole le combinazioni convessi delle distribuzioni invarianti con supporto dato da qualche classe comunicante chiusa. Quindi λ è distribuzione invariante se e sole se

$$\lambda = (\alpha/2, \alpha/2, \beta/4, 3\beta/4, \gamma, 0)$$

per qualche $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ con $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

ESERCIZIO 2.

(a) Se fosse $T_k = \infty$ per qualche k allora la passeggiata passa un tempo finito in $5\mathbb{Z}$. Sappiamo pero' che è ricorrente e che con prob.1 torna infinite volte in 0 (teorema di Polya), quindi con prob. 1. passa infinito tempo in 0 e quindi in $5\mathbb{Z}$. questo implica che $T_k = +\infty$ per ogni k con prob.1.

(b) Calcoliamo $P(Y_1 = 5)$. Abbiamo

$$P(Y_1 = 5) = P(X_1 = 1, Y_{T_1} = 5) = P(X_1 = 1)(Y_{T_1} = 5 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} P_1(H_5 < H_0)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato proprietà di Markov al tempo 1 e dove abbiamo usato la notazione $H_k := \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n = k\}$. Il calcolo di $P_1(H_5 < H_0)$ è già stato visto in classe (cf. esercizio 13 dell'eserciziario). Richiamiamo il procedimento: considero CM su $\{0,1,\ldots,5\}$ dove $0,5$ sono stati assorbenti e dove si salta da x a $x \pm 1$ con prob. 1/2 se $1 \leq x \leq 4$. Indichiamo con $\bar{P}_i$ la legge di questa nuova catena con stato iniziale i. Allora $P_1(H_5 < H_0) = \bar{P}_1(H_5 < +\infty)$, mentre posto $h_i = \bar{P}_i(H_5 < +\infty)$ abbiamo

$$\begin{cases} h_0 = 0\,,\ h_5 = 1 \\ h_i = \frac{h_{i-1}+h_{i+1}}{2}\,, & 1 \leq i \leq 4 \end{cases}$$

Otteniamo che h_i è a incrementi costanti e quindi $h_i = i/5$. Quindi $P_1(H_5 < H_0) = 1/5$ e quindi $P(Y_1 = 5) = 1/10$. Per simmetria $P(Y_1 = -5) = P(Y_1 = 5) = 1/10$. Per esclusione abbiamo $P(Y_0 = 0) = 1 - (Y_1 = -5) - P(Y_1 = 5) = 8/10$.

(c) Proviamo che $(Y_n)_{n\geq 0}$ è CM(λ, P) su $5\mathbb{Z}$ dove $\lambda = \delta_0$ e P è la matrice di transizione

$$P_{i,j} = \begin{cases} 8/10 & \text{se } j = i \\ 1/10 & \text{se } j = i \pm 5 \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Per costruzione $Y_n \in 5\mathbb{Z}$. Dato che $Y_0 = X_0 = 0$ abbiamo $P(Y_0 = i) = \delta_{0,i}$. Fissiamo $i_0, i_1, \dots i_n$ stati in $5\mathbb{Z}$. Siccome con prob. 1 abbiamo $T_k < \infty$ e $Y_k = X_{T_k}$ per ogni k, vale

$$P(Y_{n+1} = i_{n+1}|Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) = P(X_{T_{n+1}} = i_{n+1}|A \cap \{T_n < \infty, X_{T_n} = i_n\})$$

dove $A := \{T_k < \infty \forall k = 1, 2, \dots, n-1\} \cap \{X_{T_k} = i_k \forall k = 1, 2, \dots, n-1\}$. Osservo che T_n è tempo d'arresto (vedi sotto) e che A dipende dalla storia di X. fino al tempo T_n. Quindi per la proprietà di Markov forte al tempo T_n abbiamo che

$$P(X_{T_{n+1}} = i_{n+1}|A \cap \{T_n < \infty, X_{T_n} = i_n\}) = \\ P(X_{T_{n+1}} = i_{n+1}|T_n < \infty, X_{T_n} = i_n) = P_{i_n}(X_{T_1} = i_{n+1}) = P_{i,j}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla definizione della matrice P e dal calcolo al punto (b).

T_n è tempo di Markov dato che per ogni $m = 0, 1, 2, \dots$ l'evento $\{T_n = m\}$ corrisponde a dire che $X_m \in 5\mathbb{Z}$ e che $\sharp\{r : 1 \leq r \leq m \text{ and } X_r \in 5\mathbb{Z}\} = m$. Quindi conoscendo $(X_r)_{0 \leq r \leq m}$ possiamo dire se l'evento $\{T_n = m\}$ si è verificato oppure no.

ESERCIZIO 3. Abbiamo visto che, fissato k, data una CM anche $(X_{kn})_{n \geq 0}$ è catena di markov. Nel nostro caso $k = 2$ e siccome partendo da zero la catena resta all'interno di $J = \{0, 2, 4, 6\}$ possiamo restringerci allo spazio degli stati J. Chiamato $Y_n := X_{2n}$, pensiamo a $(Y_n)_{n \geq 0}$ come a CM su J con distribuzione iniziale δ_0 e probabilità di transizione

$$p_{i,j} := \begin{cases} 4/9 & \text{se } i = j \\ 4/9 & \text{se } j = i + 2 \\ 1/9 & \text{se } j = i - 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infatti

$$P(X_{2n+2} = i|X_{2n} = i) = P(X_{2n+1} = i + 1, X_{2n+2} = i|X_n = i) \\ + P(X_{2n+1} = i - 1, X_{2n+2} = i|X_n = i) = 2(1/3)(2/3) = 4/9$$

$$P(X_{2n+2} = i+2|X_{2n} = i) = P(X_{2n+1} = i+1, X_{2n+2} = i+2|X_n = i) = (2/3)(2/3) = 4/9$$
$$P(X_{2n+2} = i-2|X_{2n} = i) = P(X_{2n+1} = i-1, X_{2n+2} = i-2|X_n = i) = (1/3)(1/3) = 1/9$$

La matrice di transizione è irriducibile e a periodica (infatti $p_{i,i} > 0$). Essendo J finito ho un'unica distribuzione invariante π, e siccome il meccanismo di salto è omogeneo nei vari punti iniziali per simmetrica la distribuzione invariante deve essere quella uniforme su J (tra l'altro si verifica facilmente che quella uniforme è invariante). Avendo CM irriducibile e aperiodica applico teorema convergenza all'equilibrio che mi dice che

$$\lim_{n \to \infty} P(Y_n = j) = \pi(j) = 1/4 \qquad \forall j \in J$$

Siccome partendo da 0 la catena X. non visita stati fuori J concludo che $\lim_{n \to \infty} P(X_{2n} = j) = 1/4$ se $j \in J$ e $\lim_{n \to \infty} P(X_{2n} = j) = 0$ se $j \in I \setminus J$.

Chiamo $H := \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ e $k_i := E_i(H)$. Osservo che $E(T) = E_0(H)$. Abbiamo $k_3 = 0$ e sappiamo che $k_i = \frac{2}{3}k_{i+1} + \frac{1}{3}k_{i-1} + 1$ per $i \neq 3$.

Primo metodo Sappiamo $k_0 = \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_{-1} + 1$.

Posto $Y_n = X_{2n}$ abbiamo per i dispari $E_i(T) = 2E_i(T')$ dove $T' := \inf\{n \geq 0 : Y_n = 3\}$. $(Y_n)_n$ è CM su $\{1,3,5,7\}$ con matrice di transizione quella descritta al punto (a). Posto $t_i := E_i(T')$ abbiamo

$$\begin{cases} t_3 = 0 \\ t_1 = (1/9)t_7 + (4/9)t_1 + (4/9)t_3 + 1 \\ t_5 = (1/9)t_3 + (4/9)t_5 + (4/9)t_7 + 1 \\ t_7 = (1/9)t_5 + (4/9)t_7 + (4/9)t_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_3 = 0 \\ 5t_1 = t_7 + 9 \\ 5t_5 = 4t_7 + 9 \\ 5t_7 = t_5 + 4t_1 + 9 \end{cases}$$

Otteniamo

$$t_1 = \frac{9 \cdot 27}{17 \cdot 5}, \qquad t_5 = \frac{9 \cdot 57}{17 \cdot 5}, \qquad t_7 = \frac{90}{17}.$$

Concludiamo che

$$E(T) = k_0 = \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_{-1} + 1 = \frac{4}{3}t_1 + \frac{2}{3}t_7 + 1 = \frac{709}{85}$$

Secondo metodo Posto $\Delta_i = k_{i+1} - k_i$, vale quindi $\frac{2}{3}\Delta_i + 1 = \frac{1}{3}\Delta_{i-1}$ per $i \neq 3$, ovvero $2\Delta_i + 3 = \Delta_{i-1}$ per $i \neq 3$. Ottengo (si noti che $3 = -5$)

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2\Delta_2 + 3 \\ \Delta_0 = 2\Delta_1 + 3 = 4\Delta_2 + 9 \\ \Delta_{-1} = 2\Delta_0 + 3 = 8\Delta_2 + 21 \\ \Delta_{-2} = 2\Delta_{-1} + 3 = 16\Delta_2 + 45 \\ \Delta_{-3} = 2\Delta_{-2} + 3 = 32\Delta_2 + 93 \\ \Delta_{-4} = 2\Delta_{-3} + 3 = 64\Delta_2 + 189 \\ \Delta_{-5} = 2\Delta_{-4} + 3 = 128\Delta_2 + 381 \end{cases}$$

Siccome $\sum_{i \in I} \Delta_i = 0$, la somma degli addendi nella prima colonna dà $-\Delta_2$. Sommando gli addendi della seconda colonna abbiamo $254\Delta_2 + 741$. Quindi $-\Delta_2 = 254\Delta_2 + 741$, quindi abbiamo $-\Delta_2 = 741/255$. Finalmente otteniamo (recall: $k_3 = 0$)

$$E(T) = k_0 = (k_0 - k_1) + (k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) = -\Delta_0 - \Delta_1 - \Delta_2 =$$
$$-(4\Delta_2 + 9) - (2\Delta_2 + 3) - \Delta_2 = -7\Delta_2 - 12 = 7\frac{741}{255} - 12 = 7\frac{247}{85} - 12 = \frac{709}{85}$$