PROBABILITÀ I. a.a. 2012/2013
DIARIO DELLE LEZIONI

- **Settimana 4-8 marzo**. Elementi di analisi combinatoria (vedasi capitolo I del Ross). Integrazioni: triangolo di Tartaglia, dimostrazione diretta della Prop. 6.2 descrivendo il vettore $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ con una stringa composta da n "$\circ$" e $r-1$ "$|$".

  Esercizi del libro di testo (Capitolo I) discussi a lezione: 3,4,7,12,13,14. Esercizi assegnati per la settimana successiva 15,16,18,20,21,33.
- **Settimana 11-15 marzo**. Spazio campionario, esiti, eventi, eventi incompatibili, spazio di probabilità, alcune proprietà degli spazi di probabilità, spazi con esiti equiprobabili. esercizi con dadi, urne contenenti palline colorate, mazzi di carte. Principio di inclusione-esclusione.

  Esercizi per la prossima settimana: 9,17,18,19,23,27,35
  Esercizi discussi: 10,12, 15
  Esercizi discussi al tutoraggio: 10, 19, 23, 25, 27, 31

- **Settimana 18–22 marzo**. Caratterizzazione della funzione di probabilità tramite la sua restrizione agli eventi elementari (vedi file integrazioni), probabilità condizionata, regola del prodotto, legge della probabilità totale.

  Esercizi discussi del capitolo II: 9,17,18,19,23,27,35, 25,32,33.
  Esercizi discussi al tutoraggio: 11,13,28, 29 (capitolo II)
  Esercizi per la prossima settimana: 45,46,47,51,56 (capitolo II). 1,6 (capitolo III)

- **Settimana 25–29 marzo**. Calcolo probabilità condizionata con spazio ridotto (es. 2c cap III), formula di Bayes, rapporto a favore, discussione di alcuni esempi del cap.III di particolare interesse (es. 3d, es. 3f, es. 3g, es. 3l). Eventi indipendenti, prove, es. 4f del cap. III.

  Esercizi per la prossima settimana: 23,24,26,28,31,35,64,66 (cap III).
  Esercizi discussi: 1,6,7,8 (cap.III)
  Esercizi discussi al tutoraggio: 11,13,28,29 (cap.III)

- **Settimana 1-5 aprile** Discussione degli esempi 4f, 4h, 4k,4l del capitolo III. Prop. 5.1 del cap. III.

  Esercizi per la prossima settimana: 47, 56, 57, 60 (cap III).
  Esercizi discussi: 23,24,26,28,31,35,64,66 (cap III)

- **Settimana 8-12 aprile**
  Spazi di probabilità prodotto (v. file integrazioni), variabile aleatoria, funzione di distribuzione e sue proprietà (sez. 4.9 del cap IV), variabile aleatoria discreta, densità discreta, valore atteso di una v.a. discreta, valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria, proprietà di linearità del valore atteso, varianza di una v.a.

Esercizi discussi: 47,56,57,60,61 (cap III), 1,2,4 (cap IV)
Esercizi assegnati per la prossima settimana: 12,13,14,21 (cap IV)
Esercizi discussi al tutoraggio: 2, 4, 40, 42, 48 (cap III)
Esercizi assegnati al tutoraggio: 44, 45 e 53 (cap III).

- **Settimana 15–19 aprile** *Fatto: La varianza di una v.a. X è sempre nonnegativa ed è nulla se e solo se esiste una constance $c \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{P}(X = c) = 1$. In tal caso, $c = \mathbb{E}X$.* Identità $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ Deviazione standard. Momenti di una v.a. V.a. di Bernoulli, sua media e varianza. V.a. binomiale, sua media e varianza tramite formula ricorsiva per il calcolo del momento n–esimo. Comportamento qualitativo della densità discreta di una v.a. binomiale. Discussione dell'esempio 6g del capitolo IV. Discussione dell'esempio 4j del capitolo III (il problema dei punti). Correzioni di esercizi e discussione di esempi in preparazione all'esonero.

  Esercizi discussi: 12,13,14,21 (cap IV)
  Esercizi discussi a tutoraggio: cap III esercizi 44 , 45 ; cap IV esercizi 17 , 19 , 23.
  Esercizi assegnati a tutoraggio: 53 cap III e 8 e 9 teorici del cap IV.

- **Settimana 29 aprile – 3 maggio** *Fatto: Sia X v.a. discreta. Allora $1 = \sum_{a \in \mathbb{R}} p_X(a)$.* Nella precedente affermazione la serie su $a \in \mathbb{R}$ (insieme non numerabile) si intende come segue: si sommano solo i termini per cui $p_X(a) > 0$.
  Fatto: siano $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{p_i\}_{i \in I}$ insiemi numerabili di numeri reali. Allora esiste una v.a. discreta X tale che
  $$p_X(a) = \begin{cases} p_i & \text{se } a = x_i \text{ per qualche } i \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  se e solo se (1) $p_i \geq 0$ per ogni $i \in I$, (2) $\sum_{i \in I} p_i = 1$.
  Variabile aleatoria geometrica, variabile binomiale negativa, perdita di memoria della v.a. geometrica: *Fatto: Sia X v.a. geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Allora $P(X = n+k \,|\, X > n)P(X = k)$ per ogni n, k interi positivi*

  Esercizi corretti: 35, 38, 41, 43,44,45,71 (cap IV)
  Esercizi assegnati 75,76,78,79,81 (cap IV).
  Esercizi svolti a tutoraggio: 11 , 24 , 26 , 40 , 42 e teorici 8 e 9 (cap IV).

- **Settimane 6 maggio – 17 maggio** v.a. ipergeometrica, v.a. di Poisson di parametro λ (sezione 4.7 del cap IV fino al paradigma di poisson escluso).

  Prop. 0.1. *Sia $(p_n)_{n \geq 1}$ una successione di numeri in $[0, 1]$ tali che $\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda \in [0, \infty)$. Per ogni n sia $X_n = Bin(n, p_n)$. Sia Z v.a. di Poisson di parametro λ (se $\lambda = 0$, poniamo $Z \equiv 0$). Allora per ogni $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ vale*
  $$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Z = k)\,.$$

Variabili aleatorie continue: definizione, funzione di densità e sue proprietà, funzione di distribuzione (sez.5.1 cap V). distribuzione di una funzione di v.a (sez. 5.7 cap V), valore atteso e varianza di v.a. continua (sez. 5.2)
Esercizi corretti 49, 51,53, 55, 75,76,78,79,81 (cap IV), 1 (cap V) .
Esercizi svolti a tutoraggio: 29,30,56,59,61 + 16,19,35 teorici (cap IV)

- **Settimana 20–24 maggio** Proprietà della media e della varianza di una v.a. continua, calcolo varianza della v.a. uniforme, definizione di v.a. gaussiana (normale) di parametri μ, σ^2, interpretazione dei parametri come media e varianza rispettivamente, l'immagine affine di una v.a. gaussiana é ancora una v.a. gaussiana, legge di de moivre–laplace e discussione di applicazioni, v.a. esponenziale, perdita di memoria della v.a. esponenziale, v.a. discrete vettoriali, densità congiunta e densità discreta.
  Esercizi corretti: 11,12,13,16,18,22,24,26,27,31,32,33 (cap V)
  Esercizi svolti a tutoraggio: 2, 3, 6, 7, 8, 14, 20 e 5, 8 teorici (cap V)

- **Settimana 27–31 maggio** v.a. indipendenti, criterio per verificare l'indipendenza tramite densità congiunta e densità discreta, valore atteso di una funzione di v.a. vettoriale discreta, linearità del valore atteso, covarianza, bilinearità della covarianza, varianza di una somma di v.a. , somma di v.a. di poisson indipendenti, somma di v.a. binomiali indipendenti con lo stesso parametro p. Quasi tutta questa parte sta nel file "integrazioni sulle v.a.", che devo aggiornare aggiungendo la parte mancante.

  Argomenti scelti del cap VI del Ross: sez. 6.1 fino a pagina 251 inclusa, definizione di funzione di distribuzione congiunta a fine p. 256, esempio 1f (distribuzione multinomiale) a pag 257. sez. 6.2 fino all'esempio 2a incluso. esempio 3e e 3f della sez. 6.3. sez.6.4 (distribuzioni condizionate: il caso discreto).

  Argomenti scelti del cap. VII del Ross: sez. 7.1, esempio 2b,2e,2f,2g,2h della sez. 7.2, sez.7.4 fino all'esempio 4b incluso.

  Esercizi svolti a tutoraggio: 19, 20, 21, 34, 37 + teorici 9, 12, 13 (capV)
  Esercizi assegnati a tutoraggio: 7,8, 41 + 5 teorico. (cap V)
  Esercizi corretti a lezione: 1,2,3,6,7,11,24,35,37,39,40,41 (cap VI)
  Esercizi assegnati a lezione: 6,7,12,13,22,33,36,41 (cap VII)

- **Settimana 3-7 giugno**

  Prop. 0.2. *Sia X v.a. tale che $\mathbb{P}(X \leq c) = 1$ per qualche costante $c \in \mathbb{R}$. Allora $\mathbb{E}(X) \leq c$.*
  Analogamente se X è v.a. tale che $\mathbb{P}(X \geq c) = 1$ per qualche costante $c \in \mathbb{R}$, allora $\mathbb{E}(X) \geq c$.

vedasi sez. 7.1, cap VII

Esempio 2b, 2c, 2d, 2i della sez. 7.2 cap. VII

Coefficiente di correlazione di due v.a. X,Y definite sullo stesso spazio di probabilità, (v. pagine 349, 350 ross bianco, fino all'es.4d incluso)

Funzione generatrice dei momenti e calcolo per alcuni esempi notevoli quali v.a. binomiale, v.a. di Poisson , v.a. esponenziale, v.a. geometrica, v.a. gaussiana.
La funzione generatrice di una somma di v.a. indipendenti è il prodotto delle singole funzioni generatrici
Le funzioni generatrici hanno grande rilevanza teorica per il seguente fatto (si richiede solo l'enunciato e non la dimostrazione):

Prop. 0.3. *Siano date due v.a. X, Y tali che in un opportuno intorno dell'origine valga $M_X(t) = M_Y(t) < \infty$. Allora X e Y hanno la stessa distribuzione.*

Ricordiamo la seguente definizione:

Definition 0.4. *La legge, o distribuzione, di una v.a. X è la mappa*

$$\mathbb{R} \supset A \to \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1] .$$

Ad essere precisi nella suddetta definizione uno dovrebbe restringersi ai sottinsiemi A borelliani, ma tralasciamo questi dettagli di teoria della misura.

Prop. 0.5. *Siano X, Y v.a. discrete. Allora X, Y hanno la stessa distribuzione se e solo se $p_X = p_Y$ (uguaglianza delle densità discrete).*
Siano X, Y v.a. continue. Allora X, Y hanno la stessa distribuzione se e solo se $f_X(z) = f_Y(z)$ per tutti i valori $z \in \mathbb{R}$ a meno di un insieme di lunghezza 0 (uguaglianza delle funzioni di densità a meno di insieme di lunghezza 0).

Proof. Supponiamo X, Y siano v.a. discrete aventi la stessa legge. Prendendo $A = \{z\}$ con $z \in \mathbb{R}$, otteniamo $p_X(z) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A) = p_Y(z)$, dove la prima e la terza uguaglianza derivano dalla definizione di densità di probabilità , mentre la secondo deriva dall'ipotesi che X, Y hanno la stessa legge. Siccome per una generica v.a. discreta Z vale

$$\mathbb{P}(Z \in A) = \sum_{z \in A} p_Z(z)$$

con la convenzione che la somma a destra è per i valori z per cui $p_Z(z) > 0$, abbiamo che data una v.a. discreta la sua legge à determinata dalla sua densità di probabilità . Quindi se due v.a. discrete X, Y hanno la stessa densità di probabilità , allora devono avere la stessa legge.

La dimostrazione nel caso di v.a. continue richiede alcune conoscenze di teoria della misura per ora non acquisite dagli studenti. Ci limitiamo ad osservare che se f_X e f_Y sono uguali allora banalmente X, Y hanno la stessa legge. □

Tutta la sez. 7.7 del ross fino all'esempio 7h, in aggiunta calcolo momento v.a. geometrica.

Argomenti scelti del capitolo 8: Sezione 8.2 (disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Chebyshev, legge debole dei grandi numeri, interpretazione frequentistica della legge debole dei grandi numeri, le variabili aleatorie di varianza nulla sono costanti a meno di un evento di probabilità 0). Enunciato del teorema del limite centrale (la dimostrazione è stata fatta a lezione ma non viene richiesta nel programma). Sezione 8.4 (Legge forte dei grandi numeri: enunciato e dimostrazione nel caso di variabili aleatorie con momento quarto finito come nel ross).