ESAME del 5.06.20

ESERCIZIO 1. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = 4x^3 \sin(5x)$.

ESERCIZIO 2. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{2} (x^3 + e^x + 2^x)dx\,.$$

ESERCIZIO 3. Calcolare il limite $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{2x+1}}$.

ESERCIZIO 4. Calcolare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + x \geq 6 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZO 5. Considerare un campione con 10 valori numerici

$$10,\ \ 5,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 4\ \ 5,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 5,\ \ 5$$

Calcolare:
a) Media campionaria
b) Moda
c) Mediana
d) Primo e terzo quartile

ESERCIZO 6.

<u>Per scienze ambientali:</u>
Sia X una variabile gaussiana $\mathcal{N}(3, 4)$. Calcolare:
a) $\mathbb{E}[2X - 1]$.
b) $\mathrm{Var}(X)$
c) La deviazione quadratica σ_X
d) $\mathbb{E}[X^2]$.

<u>Per beni culturali:</u>
Risolvere il sistema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\, y(x)\,, \\ y(0) = 3\,. \end{cases}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Posto $f(x) = 4x^3 \sin(5x)$ abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4D(x^3)\sin(5x) + 4x^3 D\left(\sin(5x)\right) \\ &= 4(3x^2)\sin(5x) + 4x^3\left(5\cos(5x)\right) \\ &= 12x^2\sin(5x) + 20x^3\cos(5x)\,. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Dobbiamo calcolare l'integrale $\int_{-1}^{2}(x^3 + e^x + 2^x)dx$. Abbiamo $D(x^4/4) = x^3$, $De^x = e^x$ e $D\left(2^x/\ln 2\right) = 2^x$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2}(x^3 + e^x + 2^x)dx &= \left[\frac{x^4}{4} + e^x + \frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{16}{4} + e^2 + \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{4} - e^{-1} - \frac{2^{-1}}{\ln 2}\,. \end{aligned}$$

Siccome $\frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ e $4 - 2^{-1} = 7/2$ abbiamo

$$\int_{-1}^{2}(x^3 + e^x + 2^x)dx = \frac{15}{4} + e^2 + \frac{7}{2\ln 2} - e^{-1}\,.$$

ESERCIZIO 3. Per calcolare $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{2x+1}}$ basta osservare che la funzione esponenziale è continua su tutto $\mathbb{R}$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{2x+1}} = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}\right).$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{2+1/x} = \frac{1}{2},$$

quindi $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{2x+1}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$.

ESERCIZIO 4. Abbiamo un sistema di disequazioni. Cerchiamo le soluzioni della prima disequazione che possiamo riscrivere come $x^2+x-6 \geq 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado associata troviamo che $x^2+x-6 = 0$ per $x = -3, 2$. Essendo il coefficiente davanti al termine di secondo grado pari a 1 e quindi positivo troviamo che la prima disequazione è verificata per ogni

$x \in]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$. La seconda disequazione ha come soluzione $x \geq -5$. Dobbiamo trovare tutti i valori di x che soddisfano le due disequazioni, qundi intersechiamo le soluzioni delle due disequazioni ed otteniamo che il sistema risulta verificato per

$$x \in [-5, -3] \cup [2, +\infty[$$

ESERCIZIO 5.

a) La media è

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+5\cdot 5+6+10}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

b) Il valore più frequente è il numero 5. Quindi la moda è 5.

c) Ordiniamo gli elementi della lista in ordine crescente:

$$2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 10.$$

Abbiamo 10 elementi quindi calcoliamo $10/2 = 5$. Dobbiamo prendere la media fra il quinto ed il sesto posto della lista ordinata. Quindi

$$M = \frac{5+5}{2} = 5.$$

d) Calcoliamo $\frac{1}{4}10 = 2.5$. Approssimiano dall'alto 2.5 con il primo intero, ossia 3. Il primo quartile è il terzo elemento della successione ordinata, quindi

$$Q_1 = 4.$$

Per il terzo quartile, calcoliamo $\frac{3}{4}10 = 7.5$. Approssimiano dall'alto 7.5 con il primo intero, ossia 8. Il terzo quartile è l'ottavo elemento della successione ordinata, quindi

$$Q_3 = 5.$$

ESERCIZIO 6 PER S.A. X è una variabile gaussiana $\mathcal{N}(3, 4)$. Quindi $E[X] = 3$ e$\mathrm{Var}(X) = 4$.

a) Per linearità del valore atteso $E[2X-1] = 2E[X] - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

b) $\mathrm{Var}(X) = 4$

c) $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{4} = 2$

d) Siccome $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$ abbiamo $E[X^2] = \mathrm{Var}(X) + E[X]^2 =$

$4 + 3^2 = 13$.

ESERCIZIO 6 PER B.C. Siccome $2x = D(x^2)$, la soluzione generale di $y'(x) = 2x\,y(x)$ è $y(x) = Ce^{x^2}$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per trovare C imponiamo che $y(0) = 3$. Quindi $Ce^{0^2} = 3$, cioè $C = 3$. In conclusione la soluzione è $y(x) = 3e^{x^2}$.