

PROCESSI STOCASTICI 1: ESAME SCRITTO

Tempo a disposizione 2 ore e 30 min

Nota: Non è consentito l'uso di calcolatrici, né di materiale didattico.

ESERCIZIO 1 Si considerino due individui A e B e un partito politico. Descriviamo l'opinione politica dei due individui con la stringa (a, b) , dove $a, b \in \{0, 1\}$, così interpretata: se $a = 0$ allora A è contrario al partito, se $a = 1$ allora A è favorevole al partito, se $b = 0$ allora B è contrario al partito, se $b = 1$ allora B è favorevole al partito.

Chiamiamo $X_n = (a_n, b_n)$ l'opinione politica dei due individui al tempo $n \geq 0$. I due individui possono mutare la loro opinione, e ne deriva la seguente dinamica stocastica:

- al tempo $n = 0$, A è favorevole al partito e B è contrario al partito;
- se al tempo n i due individui sono entrambi sostenitori o sono entrambi contrari al partito, allora mantengono inalterata la loro opinione al tempo $n + 1$;
- se al tempo n i due individui hanno opinione differente (quindi $X_n = (0, 1)$ o $X_n = (1, 0)$) allora ciascun individuo - indipendentemente l'uno dall'altro - mantiene la propria opinione inalterata al tempo $n + 1$ con probabilità $2/3$, altrimenti la cambia.

- 1) Descrivere la suddetta dinamica con una catena di Markov a tempo discreto.
- 2) Dare una descrizione grafica della matrice di transizione.
- 3) Determinare $P(X_2 = (0, 1), X_3 = (1, 1))$.
- 4) Calcolare la probabilità che $X_n = (0, 0)$ per qualche $n \geq 0$.
- 5) Determinare stati ricorrenti, transienti, assorbenti.

ESERCIZIO 2:

Si consideri la matrice stocastica sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, \dots, 7\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- 1) Dare una rappresentazione grafica della matrice di transizione.
- 2) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse.
- 3) Determinare stati ricorrenti, transienti, assorbenti.
- 4) Determinare distribuzioni e misure invarianti rispetto a P .
- 5) Determinare distribuzioni e misure reversibili rispetto a P .

Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ la catena di Markov con matrice di transizione P e valore iniziale $X_0 = 4$. Definire

$$T_1 = \min\{n \geq 0 : X_n = 5\},$$
$$T_2 = \min\{n \geq 0 : X_n \in \{5, 6, 7\}\}.$$

- 6) Determinare $P(X_{T_1} = X_{T_1+2} | T_1 < \infty)$.
- 7) Determinare $P(X_{T_2+1} = 6 | T_2 < \infty)$.

Sia $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ la catena di Markov con matrice di transizione P e distribuzione iniziale $\lambda = (0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3)$.

8) Determinare $\lim_{n \uparrow \infty} P(Y_n = 6)$.

ESERCIZIO 3 (Liberamente ispirato a “La storia infinita” di M.Ende).

Atreiu è un ragazzo della tribù dei Pelleverde che insieme al drago Fucur deve prima recarsi dall’oracolo Uyulala e poi portare il messaggio dell’oracolo all’Infanta Imperatrice, sovrana di Fantasia.

Atreiu e Fucur iniziano il loro viaggio nel paese dei Pelleverde. Il regno di Fantasia non ha confini e Atreiu non sa né dove si trova il paese con la Colonna d’Avorio in cui risiede l’Infanta Imperatrice, né dove si trova l’oracolo Uyulala, che risiede in un paese diverso da quello dell’Infanta imperatrice.

Il drago Fucur, che è un drago della Fortuna, decide che lui e Atreiu procederanno così. Arrivati ad un paese, si sposteranno in un paese adiacente con uguale probabilità fino a quando non avranno visitato prima il paese dell’oracolo Uyulala e poi quello dell’Infanta Imperatrice.

I paesi di Fantasia sono collocati sui vertici del reticolo \mathbb{Z}^2 . Chiamare p la probabilità che, partendo dal paese dei Pelleverdi, Atreiu e il drago non raggiungano il paese dell’oracolo Uyulala prima di ritornare al paese dei Pelleverdi.

- 1) Dimostrare che la probabilità che Atreiu e il drago ritornino per n volte al paese dei Pelleverdi senza aver raggiunto il paese dell’oracolo Uyulala è p^n .
- 2) Dimostrare che con probabilità 1 Atreiu e il drago raggiungono il paese dell’oracolo Uyulala.
- 3) Dimostrare che con probabilità 1 Atreiu e il drago riescono a raggiungere il paese dell’oracolo Uyulala e poi a portare il suo messaggio all’Infanta Imperatrice.