1. Tracce degli esercizi non corretti a lezione

ESERCIZIO. Considerare la catena di Markov sui vertici di un quadrato definita dalle seguenti regole: ad ogni istante ci si può spostare da un vertice a quello adiacente in senso antiorario con probabilità p e in senso orario con probabilità $q := 1 - p$.
Determinare tutte le distribuzioni stazionarie e tutte le distribuzione reversibili.

Svolgimento. Chiamiamo 1,2,3,4 i vertici del quadrato ordinati in senso antiorario. Allora la matrice di transizione P della catena di Markov è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

P è irriducibile e lo spazio degli stati è finito, quindi sappiamo che esiste un'unica distribuzione stazionaria. Il sistema $\lambda P = \lambda$ si riduce all'identità

$$\lambda(i) = \lambda(i-1)p + \lambda(i+1)q\,, \qquad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, \} \tag{1.1}$$

dove le somme $i - 1, i + 1$ sono da intendersi modulo 4. Possiamo procedere in vari modi. ad esempio studiando gli incrementi $\Delta_i = \lambda(i + 1) - \lambda(i)$ per cui si ha $\Delta_i q = \Delta_{i-1}p$, oppure risolvendo direttamente il sistema lineare, oppure osservando che $\lambda(i) \equiv 1/4$ risolve (1.1) e dato che la distribuzione stazionaria è unica, questa deve essere data da $\lambda = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.

Resta da verificare se quest'unica distribuzione stazionaria λ è anche reversibile, cioe' se

$$(1/4)p_{i,j} = (1, 4)p_{j,i} \qquad \forall i, j \in I\,.$$

Questo è possibile solo nel caso simmetrico $p = q = 1/2$. In caso contrario non esiste alcuna distribuzione reversibile.

ESERCIZIO (file di attesa) Un centralino dispone di un certo numero di linee, quando giunge una richiesta di comunicazione esso fornisce la linea se ve ne è almeno una disponibile, altrimenti la richiesta viene messa in attesa. Supponiamo che in ogni unità di tempo alla fila d'attesa si aggiunga un numero (casuale) W di nuovi utenti e che in ogni unità di tempo il centralino sia in grado di servire Z (numero casuale) di utenti. W e Z sono variabili alatorie a valori in $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. In particolare, se al tempo n vi sono $k \geq 0$ utenti in attesa al tempo $n + 1$ vi sono $k + W - Z$ utenti in attesa se $k + W - Z \geq 0$, vi sono 0 utenti in attesa se $k + W - Z < 0$.
Supponiamo che W e Z siano variabili indipendenti, W variabile di Bernoulli di parametro β e Z variabile di Bernoulli di parametro α (cioè $P(W = 1) = \beta$, $P(W = 0) = 1 - \beta$,...).
1) Indicando con X_n il numero di utenti in attesa al tempo n, mostrare che $\{X_n\}_{n\geq 0}$ puo' essere descritta come catena di Markov su $\mathbb{N}$ con matrice di transizione $P = \{p_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$, dove i termini non nulli sono

$$\begin{cases} p_{k,k+1} = (1-\alpha)\beta & \forall k \geq 0\,, \\ p_{k,k} = a\beta + (1-\alpha)(1-\beta) & \forall k \geq 1\,, \\ p_{k,k-1} = (1-\beta)\alpha & \forall k \geq 1\,, \\ p_{0,0} = 1 - \beta + \alpha\beta \end{cases}$$

Supponiamo ora che il centralino possa mettere in fila d'attesa al piu' $m \geq 1$ utenti (dimensione del *buffer*), ovvero quando giunge una nuova chiamata il centralino la mette in attesa, a meno che non vi siano già m chiamate in attesa e in tal caso la chiamata viene respinta. W, Z sono ancora variabili di Bernoulli come sopra.
2) Provare che anche in questo caso $\{X_n\}_{n\geq 0}$ puo' essere descritta come catena di Markov su $\mathbb{N}$ determinandone la matrice di transizione.
3) Determinare distribuzioni invarianti e distribuzioni reversibili (suggerimento: cercare prima le distribuzioni reversibili).

Svolgimento. 1) La variabile $W - Z$ assume valori $-1, 0, 1$. Inoltre

$$\begin{cases} P(W-Z=1) = P(W=1, Z=0) = \beta(1-\alpha)\,, \\ P(W-Z=0) = P(W=Z) = \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta)\,, \\ P(W-Z=-1) = P(W=0, Z=1) = (1-\beta)\alpha \end{cases}$$

Se $X_n = 0$ allora abbiamo

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } W-Z=1\,, \\ 0 & \text{se } W-Z=0,-1\,. \end{cases}$$

Da cio' otteniamo che

$$p_{0,k} = \begin{cases} \beta(1-\alpha) & \text{se } k=1\,, \\ 1-\beta(1-\alpha) & \text{se } k=0\,. \end{cases}$$

Sia $k \geq 1$. Se $X_n = k$ allora abbiamo

$$X_{n+1} = \begin{cases} k+1 & \text{se } W-Z=1\,, \\ k & \text{se } W-Z=0\,, \\ k-1 & \text{se } W-Z=-1 \end{cases}$$

Da cio' otteniamo che

$$p_{k,k+r} = \begin{cases} \beta(1-\alpha) & \text{se } r=1\,, \\ \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) & \text{se } r=0\,, \\ (1-\beta)\alpha & \text{se } r=-1\,. \end{cases}$$

2) Lo spazio degli stati ora è $I = \{0, 1, \ldots, m\}$. La probabilità di transizione $p_{i,j}$ per $0 \leq i \leq m-1$ e $0 \leq j \leq m$ sono le stesse di prima. Invece se $X_n = m$ deve valere

$$X_{n+1} = \begin{cases} k & \text{se } W-Z=1,0\,, \\ k-1 & \text{se } W-Z=-1 \end{cases}$$

Da cio' otteniamo che

$$p_{m,m+r} = \begin{cases} 1-(1-\beta)\alpha & \text{se } r=0\,, \\ (1-\beta)\alpha & \text{se } r=-1\,. \end{cases}$$

3) P è irriducibile e lo spazio degli stati è finito quindi esiste un'unica distribuzione invariante. Vediamo prima se l'equazione del bilancio dettagliato puo' essere soddisfatta. Tale equazione si riduce a

$$\lambda(k)p_{k,k+1} = \lambda(k+1)p(k+1,k)\,, \qquad \forall k : 0 \leq k \leq m-1\,.$$

Cio' equivale a

$$\lambda(k)(1-\alpha)\beta = \lambda(k+1)(1-\beta)\alpha\,, \qquad \forall k : 0 \leq k \leq m-1$$

Per ricorsione otteniamo

$$\lambda(k) = \lambda(0)\left[\frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\beta)\alpha}\right]^k, \qquad \forall k : 0 \leq k \leq m$$

Quindi otteniamo che esiste un'unica distribuzione invariante la quale e' anche reversibile e tale distribuzione è data da

$$\lambda(k) = \frac{\gamma^k}{\sum_{i=0}^m \gamma^i} = \frac{\gamma^k(\gamma-1)}{\gamma^{m+1}-1}\,, \qquad \gamma := \frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\beta)\alpha}\,,$$

se $(1-\alpha)\beta \neq (1-\beta)\alpha$, mentre è data da

$$\lambda(k) = 1/(m+1)$$

se $(1-\alpha)\beta = (1-\beta)\alpha$ (ovvero $\alpha = \beta$).

ESERCIZIO Considerare la passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ dove da x si salta a $x+1$ con probabilità $p \in [0,1]$ e a $x-1$ con probabilità $q := 1-p$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$.
1) Determinarne le misure invarianti, le misure reversibili, le distribuzioni invarianti e le distribuzioni reversibili.
2) Determinare gli stati assorbenti, gli stati transitori, gli stati ricorrenti, gli stati ricorrenti positivi e gli stati ricorrenti nulli.

Svolgimento. Abbiamo visto a lezione che la risposta al punto 1) è:
Se $p \in \{0,1\}$, allora le misure invarianti sono del tipo $\lambda \equiv c$ per $c > 0$, queste non sono mai reversibile. non esistono distribuzioni invarianti o reversibili.
Se $p = q = 1/2$, allora le misure invarianti sono del tipo $\lambda \equiv c$ per $c > 0$, queste sono tutte reversibile. non esistono distribuzioni invarianti o reversibili.
Se $p \neq q$ e $p \neq 0,1$ allora le misure invarianti sono del tipo $\lambda(x) = A + B(p/q)^x$ con $A, B \geq 0$ e $A + B > 0$, queste sono reversibili solo nel caso $A = 0$ e $B > 0$. non esistono distribuzioni invarianti o reversibili.

2) Non esistono stati assorbenti. Vi è un'unica classe comunicante quindi gli stati sono o tutti transitori o tutti ricorrenti. Per confronto con i risultati sulle probabilita' di assorbimento per canene di nascita e morte o invocando il teorema di Polya, otteniamo che gli stati sono tutti ricorrenti se e solo se $p = q = 1/2$, altrimenti sono transienti. Per $p = q = 1/2$ gli stati sono tutti ricorrenti nulli, altrimenti sappiamo che dovrebbe esistere una distribuzione invariante (two 1.7.7. "Markov chains" Norris). Se $p \neq q$, allora gli stati sono tutti transitori e quindi non possono essere ricorrenti, ricorrenti nulli, ricorrenti positivi.