PROCESSI STOCASTICI: ESERCIZI

(1) **ESERCIZIO**: Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una $CM(\lambda, P)$. Provare che, dati $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e dati $i_1, \dots, i_k \in I$, allora

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k) = (\lambda P^{n_1})_{i_1} (P^{n_2 - n_1})_{i_1, i_2} \cdots (P^{n_k - n_{k-1}})_{i_{k-1}, i_k} .$$

(2) **ESERCIZIO**: Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una $CM(\lambda, P)$. Dato $k \geq 0$ dire se $(X_{kn})_{n\geq 0}$ è una CM ed in caso affermativo determinare la distribuzione iniziale e la matrice di transizione.

(3) **ESERCIZIO**: Considerare la seguente matrice stocastica sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerare $X. = MC(\lambda, P)$ con $\lambda = (1/3, 2/3, 0, 0)$.
1) Dare una rappresentazione grafica della matrice P.
2) Determinare $\mathbb{P}(X_2 = 3)$, $\mathbb{P}(X_2 = 3, X_5 = 4)$, $\mathbb{P}(X_2 \in \{3, 4\})$ e $\mathbb{P}(X_{1000} = 2,\ X_{1001} = 3 \,|\, X_{999} = 1)$.

(4) **ESERCIZIO**: Date P e Q matrici stocastiche, dimostrare che la matrice prodotto PQ è una matrice stocastica. Dedurre che la potenza P^n e il prodotto $P_1 P_2 \cdots P_n$ sono matrici stocastiche se P, P_1, P_2, ..., P_n sono matrici stocastiche.

(5) **ESERCIZIO**: Dimostrare che la combinazione convessa di matrici stocastiche è una matrice stocastica, ovvero che

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n$$

è una matrice stocastica se $P_1, P_2, \dots, P_n$ sono matrici stocastiche, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(6) **ESERCIZIO**: Svolgere gli esercizi 1.2.1 e 1.2.2 del libro di J.Norris

(7) **ESERCIZIO**: Considerare la catena di Markov con matrice di transizione P sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ data da

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Chiamato H_i il tempo di raggiungimento dello stato i, determinare $\mathbb{P}_2(X_{H_3+1} = 4 \,|\, H_3 < \infty)$ e $\mathbb{P}_2(X_{H_3+2} = 4 \,|\, H_3 = 10)$ giustificando bene la risposta.
(b) Calcolare $\mathbb{E}_2(H_3)$.

(8) **ESERCIZIO**: Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una catena di Markov con spazio degli stati I, matrice di transizione P e distribuzione iniziale λ. Sia $f : I \to J$ una funzione iniettiva. Definiamo $Y_n := f \circ X_n$. Dimostrare che $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ è una catena di Markov con spazio degli stati $f(I)$, matrice di transizione $\hat{P}$ e distribuzione iniziale $\hat{\lambda}$, dove

$$\hat{P}_{j_1,j_2} := P_{i_1,i_2} \text{ se } j_1 = f(i_1), j_2 = f(i_2)$$

e

$$\hat{\lambda}(j) = \lambda(i) \text{ se } j = f(i)\,.$$

Esibire una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ su I e una funzione $f : I \to J$ per cui $\big(f(X_n)\big)_{n\geq 0}$ non è catena di Markov.

(9) **ESERCIZIO**: Si consideri il seguente processo stocastico a tempi discreti $(X_n)_{n\geq 0}$:
(i) X_n ha valori nello spazio quoziente $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
(ii) X_0 assume un qualsiasi valore di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ con uguale probabilità,
(iii) condizionato al fatto che $X_n = i$ (qualora tale evento abbia probabilità positiva), si ha $X_{n+1} = i + 1$ con probabilità $2/3$ mentre $X_{n+1} = i - 1$ con probabilità $1/3$.
Possiamo concludere che $(X_n)_{n\geq 0}$ è una catena di Markov?

(10) **ESERCIZIO**.Due giocatori A e B dispongono inizialmente rispettivamente di a euro e b euro. Giocano una serie di partite in ciascuna delle quali si verificano due casi: (i) con probabilità p, A vince un euro e B perde un euro, (ii) con probabilità $q = 1 - p$, A perde un euro e B vince un euro. Il gioco si ferma quando uno dei due giocatori si ritrova senza soldi.
(1) Modelizzare il suddetto gioco con una catena di Markov a tempi discreti,
(2) Provare che con probabilità 1 il gioco si ferma.
(3) Trovare una formula per la probabilità che quando il gioco si ferma A abbia vinto tutto.

(11) **ESERCIZIO**: Considerare la matrice stocastica sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, \ldots, 5\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Dare una rappresentazione grafica della matrice P.
2) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse, stati assorbenti, stati ricorrenti e stati transienti.

(12) **ESERCIZIO** Si consideri la passeggiata semplice simmetrica su $\mathbb{Z}$ con stato iniziale 0. Determinare la probabilià che il tempo per raggiungere -5 sia minore del tempo per raggiungere 4.
Suggerimento: considerare la catena di Markov su $\{-5, -4, \ldots, 3, 4\}$ dove $-5, 4$ sono stati assorbenti mentre $p_{x,x+1} = p_{x,x-1} = 1/2$ per $x = -4, -3, \ldots, 3$.

(13) **ESERCIZIO** Si consideri la catena di Markov su $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Supponendo che la catena inizi nello stato 3 determinare il valore atteso del tempo necessario per raggiungere l'insieme $\{4, 5\}$.

(14) **ESERCIZIO** Si consideri il modello per la rovina del giocatore. Nel caso di scommessa equa ($p = q = 1/2$) determinare il valore atteso del tempo $H^{(0)}$.

(15) **ESERCIZIO**. Risolvere l'esercizio 1.6.1 nel libro di norris. Suggerimento: evitare calcoli.

(16) **ESERCIZIO**. Un grafo $G = (V, E)$ consiste di un insieme di vertici V e di un insieme di lati E, dove gli elementi di E sono coppie non ordinate di vertici: $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$. Se $\{x, y\} \in E$, scriviamo $x \sim y$ e diciamo che x e y sono adiacenti. Il grado di $x \in V$, $deg(x)$, è definito come il numero di vertici adiacenti ad x.
Dato un grafo $G = (V, E)$ con $deg(x) < \infty\ \forall x \in V$, la passeggiata aleatoria semplice su G è definita come la catena di Markov con spazio degli stati V e matrice di transizione $P = \{p_{x,y}\}_{x,y \in V}$, dove

$$p_{x,y} := \begin{cases} \frac{1}{deg(x)} & \text{se } y \sim x,\ deg(x) \geq 1\,, \\ 0 & \text{se } y \not\sim x,\ deg(x) \geq 1\,, \\ \delta(x, y) & \text{se } deg(x) = 0\,. \end{cases}$$

(1) Mostrare che due vertici x, y sono comunicanti se e solo se esiste una famiglia $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 0$) di vertici in V con $x_0 = x$, $x_n = y$ e $x_k \sim x_{k+1}$ $\forall k : 0 \leq k < n$.
(2) Provare che tutte le classi comunicanti sono chiuse.

Supponiamo ora che V ed E siano finiti.
(3) Caraterizzare gli stati assorbenti, stati transienti e stati ricorrenti.
(4) Considerare la funzione $\lambda : V \to \mathbb{R}$ definita come

$$\lambda(x) = \frac{deg(x)}{\sum_{y \in V} deg(y)}\,.$$

Dimostrare che λ è una distribuzione invariante per la passeggiata aleatoria simmetrica. Inoltre, provare che

$$\lambda(x) = \frac{deg(x)}{2|E|}\,.$$

(5) Dimostrare che λ soddisfa l'equazione del bilancio dettagliato: $\lambda(x)p_{x,y} = \lambda(y)p_{y,x}$ per ogni $x, y \in V$.
(6) Nel caso di grafo connesso, determinare tutte le distribuzioni invarianti.

(17) **ESERCIZIO** Considerare la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione P data da

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) Determinare stati ricorrenti, stati transitori, stati assorbenti.
2) Determinare tutte le distribuzioni invarianti e tutte le misure invarianti.
3) Determinare la probabilità partendo da 2 di passare prima o poi in $\{4, 5\}$.

(18) **ESERCIZIO**. Considerare la catena di Markov sui vertici di un quadrato definita dalle seguenti regole: ad ogni istante ci si può spostare da un vertice a quello adiacente in senso antiorario con probabilità p e in senso orario con probabilità $q := 1 - p$.
Determinare tutte le distribuzioni stazionarie e tutte le distribuzione reversibili.

(19) **ESERCIZIO** Considerare la passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ dove da x si salta a $x + 1$ con probabilità $p \in [0, 1]$ e a $x - 1$ con probabilità $q := 1 - p$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$.
1) Determinarne le misure invarianti, le misure reversibili, le distribuzioni invarianti e le distribuzioni reversibili.
2) Determinare gli stati assorbenti, gli stati transitori, gli stati ricorrenti, gli stati ricorrenti positivi e gli stati ricorrenti nulli.

(20) **ESERCIZIO** Si consideri la passeggiata simmetrica semplice su $\mathbb{Z}^2$ che inizia nell'origine. Provare che con probabilità pari 1 visiterà il sito $(-1000, 100)$.

(21) **ESERCIZIO** Si lancia un dato infinite volte. Determinare la probabilità che esca 3 prima di 4 e prima di 5.

(22) **ESERCIZIO** Si consideri la catena di Markov con $I = \{1, 2, 3\}$, con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e con distribuzione iniziale è $\lambda = (1/3, 0, 2/3)$. Determinare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$$

dove $f : I \to \mathbb{R}$ è la funzione $f(i) = i^2$.

(23) **ESERCIZIO** Considerare la catena di Markov con matrice di transizione come nell'Esercizio 17.
1) Determinare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(X_n = 1)$
2) Determinare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_2(X_n = 5)$

(24) **ESERCIZIO** Due giocatori giocano la seguente partita. Inizia uno dei due giocatori estraendo 2 carte da un mazzo di 40 carte. Se escono due carte di bastoni, vince la partita. Se escono due carte dello stesso seme ma non di bastoni, tiene il gioco (cioè rimette le carte nel mazzo, estrae di nuovo 2 carte dal mazzo ,...). Se non escono due carte dello stesso seme passa il gioco all'altro giocatore.

1) Modelizzare il suddetto gioco con una catena di Markov.
2) Determinare la probabilità che a vincere sia il giocatore che ha iniziato il gioco.

(25) **ESERCIZIO** Consideriamo il modello di Ising sull'intervallo $\Lambda = \{1, 2, \dots, N\}$: l'Hamiltoniana $H(\sigma)$ associata alla configurazione $\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$ è data da

$$H(\sigma) := -\sum_{k=1}^{N-1} \sigma_k \sigma_{k+1} .$$

Questo è un modello ferromagnetico unidimensionale dove σ_k descrive lo spin ma– gnetico nella direzione fissata (es. direzione z) associato al sito k. Si consideri la distribuzione di Gibbs canonica μ_β (v. file integrazioni).
(a) Descrivere (dando l'espressione esplicita della matrice di transizione) la catena di Markov di Metropolis avente μ_β come distribuzione reversibile e ottenuta ritardando la catena di Markov così descritta: raggiunta la configurazione σ, la configurazione al tempo successivo è ottenuta scegliendo a caso (con uguale probabilità) un sito di Λ e poi cambiando il segno dello spin in tale sito nella configurazione σ (quindi la nuova configurazione differisci da σ per un singolo spin).
(b) Dire se c'è convergenza all'equilibrio per la suddetta catena di Metropolis.

(26) **ESERCIZIO** Considerare la catena di Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1, 2, 3\}$ e Q matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1/5 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calcolare $\mathbb{P}_1(J_2 > t)$.

(27) **ESERCIZIO** Considerare il processo di Poisson $(X_t)_{t \geq 0}$ di intensità 2 che inizia nell'origine.
(i) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di X_t.
(ii) Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 5, X_{10} = 11)$
(iii) Calcolare $\mathbb{P}(X_{102} - X_{100} \leq 2)$
(iv) Calcolare $\mathbb{E}(X_5^2)$
(v) Calcolare $\mathbb{E}(X_5 X_7)$.

(28) **ESERCIZIO** Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ una catena di Markov con spazio degli stati $I = \{1, 2\}$ e generatore

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor in s, per $s \downarrow 0$, di $\mathbb{P}_1(X_s = 1)$ e $\mathbb{P}_1(X_s = 2)$.
b) Trovare una base di autovettori di Q ed usare tale informazione per calcolare $P(t) = e^{tQ}$
c) Calcolare $\mathbb{P}_2(X_6 = 2 \,|\, X_4 = 1)$
d) Nel caso di distribuzione iniziale $\lambda = (1/3, 2/3)$, calcolare $\mathbb{P}(X_4 = 1, X_6 = 2)$.

(29) **ESERCIZIO**: Considerare la catena di Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ sullo spazio degli stati $I = \{1,2,3,4,5\}$ con generatore Q dove

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Dare una rappresentazione grafica della matrice Q.
2) Determinare stati ricorrenti e stati transienti.
3) Determinare la probabilità, partendo dallo stato 3, di raggiungere lo stato 1.
4) Dire se $\mathbb{P}_3(X_{189} = 5) > 0$, giustificando la risposta.
5) Calcolare la probabilità $\mathbb{P}_1(X_t = 1 \text{ per qualche } t \geq 1000)$.
5) Determinare tutte le distribuzioni invarianti.

(30) **ESERCIZIO**: Sia $I = \{1,2,3\}$ e sia Q la Q-matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrare che Q ha un'unica distribuzione invariante λ e calcolarla.
(b) Determinare la legge del processo invertito nel tempo $(X_{100-t})_{0\leq t\leq 100}$ se la catena $(X_t)_{t\geq 0}$ è $\mathrm{CM}(\lambda, Q)$.

(31) **ESERCIZIO**: Sia (Y_1, Y_2) un vettore gaussiano con media $(2,-1)$ e matrice di covarianza

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sua (Z_1, Z_2) il vettore aleatorio definito come

$$\begin{cases} Z_1 := 2Y_1 - 5Y_2\,, \\ Z_2 := -Y_2\,. \end{cases}$$

Mostrare che (Z_1, Z_2) è un vettore gaussiano, determinarne il valor medio e la matrice di covarianza, scriverne la funzione di densità di probabilità se esiste.

(32) **ESERCIZIO**: Dimostrare che un vettore gaussiano ha entrate indipendenti se e solo se la sua matrice di covarianza è diagonale.

(33) **ESERCIZIO**: Usando la funzione generatrice della gaussiana standard e lo sviluppo di e^x come serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, provare che la variabile gaussiana standard X ha i seguenti momenti:

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!}\,, \qquad \mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

(34) **ESERCIZIO**: Sia $X \sim \mathcal{N}(1,2)$. Calcolare $\mathbb{E}[X^3]$.

(35) **ESERCIZIO**: Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano che inizia in 0, con parametro di drift 5 e varianza 3.
- Scrivere in forma di integrale $\mathbb{P}(1 \leq B_2 \leq 3, B_5 \geq 7)$
- Calcolare $\mathbb{E}[B_3^2]$, $\mathbb{E}[B_3 B_5]$

(36) **ESERCIZIO** Si consideri la catena di Markov su $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Determinare distribuzioni invarianti e distribuzioni reversibili.

(37) **ESERCIZIO** Si consideri 5 punti disposti lungo un cerchio. Determinare se la matrice di transizione è aperiodica per le seguenti catene di Markov
- Da x si salta in $x-1$ e $x+1$ con probabilità 1/2, 1/2.
- Da x si salta in $x-1$, x e $x+1$ con probabilità 1/3, 1/3, 1/3.
- Da x si salta in $x+2$ e $x-1$ con probabilità 1/2, 1/2.

(38) **ESERCIZIO**. Si consideri la catena di Markov a tempi continui $(X_t)_{t\geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1,2,3,4\}$, distribuzione iniziale $\lambda = (1/4, 2/4, 1/4, 0)$ e generatore

$$Q = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di salto associata a Q.
(b) Calcolare la probabilità che nell'intervallo $[0,2]$ la catena non salti
(c) Calcolare la probabilità che nell'intervallo $[0,2]$ la catena faccia esattamente un salto.
(d) Calcolare la probabilità che nell'intervallo $[0,2]$ la catena visiti in ordine cronologico gli stati 1,2,3.

(39) **ESERCIZIO**. Si consideri una catena di Markov a tempi continui con 2 stati e con generatore

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare e^{tQ} (ad esempio diagonalizzando la matrice).
(b) Supponendo che $\lambda = (1/3, 2/3)$ calcolare la distribuzione di X_{100}
(c) Supponendo che $\lambda = (1/3, 2/3)$ calcolare la probabilità dell'evento $\{X_{100} = 1, X_{105} = 2\}$.