**PROCESSI STOCASTICI 1: ESERCIZI**

(1) **ESERCIZIO**: Date $P$ e $Q$ matrici stocastiche, dimostrare che la matrice prodotto $PQ$ è una matrice stocastica. Dedurre che la potenza $P^n$ e il prodotto $P_1 P_2 \cdots P_n$ sono matrici stocastiche se $P$, $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ sono matrici stocastiche.

(2) **ESERCIZIO**: Dimostrare che la combinazione convessa di matrici stocastiche è una matrice stocastica, ovvero che

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n$$

è una matrice stocastica se $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sono matrici stocastiche, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(3) **ESERCIZIO**: Dimostrare che un processo a tempi discreti $\{X_n\}_{n\geq 0}$ con $X_n$ a valori nello spazio numerabile $I$ è una catena di Markov con matrice di transizione $P = (p_{i,j})_{i,j\in I}$ e distribuzione iniziale $\lambda$ se e solo se vale la seguente proprietà: per ogni $n \geq 0$ e per ogni famiglia $i_0, i_1, \ldots, i_n$ di stati in $I$ vale

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_{n-1},i_n}\,.$$

(4) **ESERCIZIO**: Si consideri la seguente catena di Markov a tempi discreti $\{X_n\}_{n\geq 0}$:
(i) $X_n$ ha valori nello spazio quoziente $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
(ii) $X_0$ assume un qualsiasi valore di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ con uguale probabilità,
(iii) condizionato al fatto che $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$,... e $X_n = i_n$ (qualora tale evento abbia probabilità positiva), si ha $X_{n+1} = i_n + 1$ con probabilità $2/3$ mentre $X_{n+1} = i_n$ con probabilità $1/3$.
1) Determinare la matrice di transizione e la distribuzione iniziale.
2) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse, stati assorbenti, stati ricorrenti e stati transienti.
3) Determinare la distribuzione di $X_3$ e la distribuzione (densità di probabilità congiunta) di $(X_3, X_5)$.
4) Determinare la probabilità dell'evento $\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_4 = 2\}$.
5) Chiamato $T$ il primo tempo in cui il processo visita lo stato 1, cioé

$$T := \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n = 1\}$$

determinare la probabilità condizionata $P(X_{T+4} = X_T, X_{T+5} = X_T + 1 | T < \infty)$.

(5) **ESERCIZIO**: Considerare la matrice stocastica sullo spazio degli stati $I = \{1, 2, \ldots, 5\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Dare una rappresentazione grafica della matrice $P$.
2) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse, stati assorbenti, stati ricorrenti e stati transienti.

(6) **ESERCIZIO** Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov con spazio degli stati $\mathbb{Z}$, matrice di transizione $P$ e distribuzione iniziale $\lambda$. Definire le seguenti successioni $\{Y_n\}_{n\geq 0}$, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, $\{T_n\}_{n\geq 0}$, $\{W_n\}_{n\geq 0}$ di variabili aleatorie:

$$Y_n := 2X_n + 1\,, \quad Z_n := X_{3n}\,, \quad T_n := \max\{X_n, 0\}\,, \quad W_n := \begin{cases} 1 & \text{se } X_n = 5\,, \\ 0 & \text{se } X_n \neq 5\,. \end{cases}$$

Dire se le suddette successioni di variabili aleatorie sono catene di Markov (giustificando la risposta) e in caso affermativo determinare matrice di transizione e distribuzione iniziale.

(7) **ESERCIZIO**: Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov con spazio degli stati $I$, matrice di transizione $P$ e distribuzione iniziale $\lambda$. Sia $f : I \to J$ una funzione iniettiva. Definiamo $Y_n := f \circ X_n$. Dimostrare che $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ è una catena di Markov con spazio degli stati $J$, matrice di transizione $\hat{P}$ e distribuzione iniziale $\hat{\lambda}$, dove

$$\hat{P}_{j_1,j_2} = \begin{cases} P_{i_1,i_2} & \text{se } j_1 = f(i_1), j_2 = f(i_2)\,, \\ 0 & \text{se } j_1 = f(i_1), j_2 \notin f(I)\,, \\ \delta_{j_1,j_2} & \text{se } j_1 \notin f(I)\,, \end{cases}$$

e

$$\hat{\lambda}(j) = \begin{cases} \lambda(i) & \text{se } j = f(i)\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

(8) **ESERCIZIO**: Si consideri il seguente processo stocastico a tempi discreti $\{X_n\}_{n\geq 0}$:
(i) $X_n$ ha valori nello spazio quoziente $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
(ii) $X_0$ assume un qualsiasi valore di $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ con uguale probabilità,
(iii) condizionato al fatto che $X_n = i$ (qualora tale evento abbia probabilità positiva), si ha $X_{n+1} = i + 1$ con probabilità $2/3$ mentre $X_{n+1} = i - 1$ con probabilità $1/3$.
Possiamo concludere che $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una catena di Markov?

(9) **ESERCIZIO**. Si consideri la catena di nascita e morte su $\{0, 1, 2, ...\}$ con probabilità di transizione $p_{0,0} = 1$, $p_{i,i+1} = (1 + i)^{-2}$ e $p_{i,i-1} = 1 - (1 + i)^{-2}$ per ogni $i = 1, 2, 3, \ldots$. Determinare $h_i := P_i(X_n = 0 \text{ per qualche } n \geq 0\}$ per ogni $i = 0, 1, 2, \ldots$. Determinare $h_i^{(1)} = P_i(X_n = 1 \text{ per qualche } n \geq 0\}$ per ogni $i = 0, 1, 2, \ldots$.

(10) **ESERCIZIO**. Un grafo $G = (V, E)$ consiste di un insieme di vertici $V$ e di un insieme di lati $E$, dove gli elementi di $E$ sono coppie non ordinate di vertici: $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}$. Se $\{x, y\} \in E$, scriviamo $x \sim y$ e diciamo che $x$ e $y$ sono adiacenti. Il grado di $x \in V$, $deg(x)$, è definito come il numero di vertici adiacenti ad $x$.
Dato un grafo $G = (V, E)$ con $deg(x) < \infty$ $\forall x \in V$, la passeggiata aleatoria

semplice su $G$ è definita come la catena di Markov con spazio degli stati $V$ e matrice di transizione $P = \{p_{x,y}\}_{x,y \in V}$, dove

$$p_{x,y} := \begin{cases} \frac{1}{deg(x)} & \text{se } y \sim x,\ deg(x) \geq 1\,, \\ 0 & \text{se } y \not\sim x,\ deg(x) \geq 1\,, \\ \delta(x,y) & \text{se } deg(x) = 0\,. \end{cases}$$

(1) Dimostrare che due vertici $x, y$ sono comunicanti se e solo se esiste una famiglia $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geq 0)$ di vertici in $V$ con $x_0 = x$, $x_n = y$ e $x_k \sim x_{k+1}$ $\forall k : 0 \leq k < n$.
(2) Provare che tutte le classi comunicanti sono chiuse.

Supponiamo ora che $V$ ed $E$ siano finiti.
(3) Caraterizzare gli stati assorbenti, stati transienti e stati ricorrenti.
(4) Considerare la funzione $\lambda : V \to \mathbb{R}$ definita come

$$\lambda(x) = \frac{deg(x)}{\sum_{y \in V} deg(y)}\,.$$

Dimostrare che $\lambda$ è una distribuzione invariante per la passeggiata aleatoria simmetrica. Inoltre, provare che

$$\lambda(x) = \frac{deg(x)}{2|E|}\,.$$

(5) Dimostrare che $\lambda$ soddisfa l'equazione del bilancio dettagliato: $\lambda(x)p_{x,y} = \lambda(y)p_{y,x}$ per ogni $x, y \in V$.

(11) **ESERCIZIO**. Considerare $P$ matrice di transizione sulla spazio degli stati $I$. Dimostrare che se $I$ è finito allora vale il seguente criterio: lo stato $i \in I$ è transitorio se e solo se esiste uno stato $j$ tale che $i$ conduce a $j$ ma $j$ non conduce ad $i$.

(12) **ESERCIZIO** Considerare la catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione $P$ data da

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) Determinare stati ricorrenti, stati transitori, stati assorbenti.
2) Determinare tutte le distribuzioni invarianti e tutte le misure invarianti.
3) Determinare la probabilità partendo da 1 di passare prima o poi in $\{4, 5\}$.

(13) **ESERCIZIO**.Due giocatori $A$ e $B$ dispongono inizialmente rispettivamente di $a$ euro e $b$ euro. Giocano una serie di partite in ciascuna delle quali si verificano due casi: (i) con probabilità $p$, $A$ vince un euro e $B$ perde un euro, (ii) con probabilità $q = 1 - p$, $A$ perde un euro e $B$ vince un euro. Il gioco si ferma quando uno dei due giocatori si ritrova senza soldi.
(1) Modelizzare il suddetto gioco con una catena di Markov a tempi discreti,
(2) Provare che con probabilità 1 il gioco si ferma.

(3) Trovare una formula per la probabilità che quando il gioco si ferma $A$ abbia vinto tutto.

(14) **ESERCIZIO**. Considerare la catena di Markov sui vertici di un quadrato definita dalle seguenti regole: ad ogni istante ci si può spostare da un vertice a quello adiacente in senso antiorario con probabilità $p$ e in senso orario con probabilità $q := 1 - p$.
Determinare tutte le distribuzioni stazionarie e tutte le distribuzione reversibili.

(15) **ESERCIZIO** Due giocatori giocano la seguente partita. Inizia uno dei due giocatori estraendo 2 carte da un mazzo di 40 carte. Se escono due carte di bastoni, vince la partita. Se escono due carte dello stesso seme ma non di bastoni, tiene il gioco (cioè rimette le carte nel mazzo, estrae di nuovo 2 carte dal mazzo ,...). Se non escono due carte dello stesso seme passa il gioco all'altro giocatore.
1) Modelizzare il suddetto gioco con una catena di Markov.
2) Determinare la probabilità che a vincere sia il giocatore che ha iniziato il gioco.

(16) **ESERCIZIO (modello di Ehrenfest)** $m$ palline sono ripartite in due urne. Ad ogni unità di tempo una delle $m$ palline viene scelta a caso e spostata dall'urna in cui si trova all'altra urna. Indichiamo con $X_n$ il numero di palline presenti nella prima urna al tempo $n$.
1) Mostrare che $X_n$ si puo' descrivere come una catena di Markov determinando la matrice di transizione.
2) Dire se la matrice di transizione è irriducibile.
3) Determinare stati transitori, ricorrenti, ricorrenti positivi e ricorrenti nulli.
4) Verificare che $\lambda : I \to \mathbb{R}$ definita come

$$\lambda(k) = \binom{m}{k} 2^{-m}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, m\,,$$

è una distribuzione e che essa soddisfa l'equazione del bilancio dettagliato.
5) Prendere la suddetta distribuzione come distribuzione iniziale della catena di Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$. Calcolare $P(X_{100} = m-1, X_{101} = m)$, $P(X_{100} = m, X_{101} = m-1)$.
6) Determinare tutte le distribuzioni invarianti.

(17) **ESERCIZIO** Considerare la passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$ dove da $x$ si salta a $x+1$ con probabilità $p \in [0,1]$ e a $x-1$ con probabilità $q := 1-p$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$.
1) Determinarne le misure invarianti, le misure reversibili, le distribuzioni invarianti e le distribuzioni reversibili.
2) Determinare gli stati assorbenti, gli stati transitori, gli stati ricorrenti, gli stati ricorrenti positivi e gli stati ricorrenti nulli.

(18) **ESERCIZIO (file di attesa)** Un centralino dispone di un certo numero di linee, quando giunge una richiesta di comunicazione esso fornisce la linea se ve ne è almeno una disponibile, altrimenti la richiesta viene messa in attesa. Supponiamo che in ogni unità di tempo alla fila d'attesa si aggiunga un numero (casuale) $W$ di nuovi utenti e che in ogni unità di tempo il centralino sia in grado di servire $Z$ (numero casuale) di utenti. $W$ e $Z$ sono variabili alatorie a valori in $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. In particolare, se al tempo $n$ vi sono $k \geq 0$ utenti in attesa al tempo $n+1$ vi sono $k + W - Z$ utenti in attesa se $k + W - Z \geq 0$, vi sono 0 utenti in attesa se

$k + W - Z < 0$.
Supponiamo che $W$ e $Z$ siano variabili indipendenti, $W$ variabile di Bernoulli di parametro $\beta$ e $Z$ variabile di Bernoulli di parametro $\alpha$ (cioè $P(W = 1) = \beta$, $P(W = 0) = 1 - \beta$,...).
1) Indicando con $X_n$ il numero di utenti in attesa al tempo $n$, mostrare che $\{X_n\}_{n\geq 0}$ puo' essere descritta come catena di Markov su $\mathbb{N}$ con matrice di transizione $P = \{p_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$, dove i termini non nulli sono

$$\begin{cases} p_{k,k+1} = (1-\alpha)\beta & \forall k \geq 0\,, \\ p_{k,k} = a\beta + (1-\alpha)(1-\beta) & \forall k \geq 1\,, \\ p_{k,k-1} = (1-\beta)\alpha & \forall k \geq 1\,, \\ p_{0,0} = 1 - \beta + \alpha\beta & \end{cases}$$

Supponiamo ora che il centralino possa mettere in fila d'attesa al piu' $m \geq 1$ utenti (dimensione del *buffer*), ovvero quando giunge una nuova chiamata il centralino la mette in attesa, a meno che non vi siano già $m$ chiamate in attesa e in tal caso la chiamata viene respinta. $W, Z$ sono ancora variabili di Bernoulli come sopra.
2) Provare che anche in questo caso $\{X_n\}_{n\geq 0}$ puo' essere descritta come catena di Markov su $\mathbb{N}$ determinandone la matrice di transizione.
3) Determinare distribuzioni invarianti e distribuzioni reversibili (suggerimento: cercare prima le distribuzioni reversibili).

(19) **ESERCIZIO** Dimostrare la seguente affermazione derivandola dalla proprietà di Markov (Thm. 1.1.2 [N]):

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una $MC(\lambda, P)$. Sia $m \geq 1$ e $i \in I$. Sia $A$ un evento determinato da $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}, X_m$ e sia $B$ un evento determinato da $X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots$. Allora

$$\mathbb{P}(B|X_m = i, A) = \mathbb{P}(B|X_m = i)\,. \tag{0.1}$$

(20) **ESERCIZIO** Si consideri la passeggiata semplice simmetrica su $\mathbb{Z}$ con stato iniziale 0. Determinare la probabilià che il tempo per raggiungere -5 sia minore del tempo per raggiungere 4.
Suggerimento: considerare la catena di Markov su $\{-5, -4, \ldots, 3, 4\}$ dove $-5, 4$ sono stati assorbenti mentre $p_{x,x+1} = p_{x,x-1} = 1/2$ per $x = -4, -3, \ldots, 3$.

(21) **ESERCIZIO** Si consideri la catena di Markov su $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Supponendo che la catena inizi nello stato 3 determinare il valore atteso del tempo necessario per raggiungere l'insieme $\{4, 5\}$.

(22) **ESERCIZIO** Si consideri il modello per la rovina del giocatore. Nel caso di scommessa equa ($p = q = 1/2$) determinare il valore atteso del tempo $H^{(0)}$.

(23) **ESERCIZIO** Si consideri la passeggiata semplice simmetrica su $\mathbb{Z}$. Usando il risultato della rovina del giocatore con scommesse eque ($p = q = 1/2$), provare che $\mathbb{P}_i(T_i < +\infty) = 1$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$ dove $T_i = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = i\}$.

(24) **ESERCIZIO** Si lancia un dato infinite volte. Determinare la probabilità che esca 3 prima di 4 e prima di 5.

(25) **ESERCIZIO** Si consideri un esperimento e siano $E, F$ eventi riferiti all'esperimento di probabilità positiva e incompatibili. L'esperimento viene ripetuto infinite volte in modo operativamente indipendente (infinite prove).
   (a) Provare che con probabilità 1 l'evento $E$ si realizza in qualche prova e che lo stesso vale per $F$.
   (b) Determinare che la probabilità che $E$ si realizzi prima di $F$.

(26) **ESERCIZIO** Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. a valori in $I$ con $I$ numerabile. Provare che $(X_n)_{n\geq 0}$ è catena di Markov e stabilire chi sono $\lambda, P$.

(27) **ESERCIZIO**. Determinare distribuzioni invarianti e distribuzioni reversibili per il modello della rovina del giocatore.

(28) **ESERCIZIO** Si consideri la catena di Markov su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Determinare distribuzioni invarianti e distribuzioni reversibili.

(29) **ESERCIZIO** Si consideri 5 punti disposti lungo un cerchio. Determinare se la matrice di transizione è aperiodica per le seguenti catene di Markov
   - Da $x$ si salta in $x - 1$ e $x + 1$ con probabilità 1/2, 1/2.
   - Da $x$ si salta in $x - 1$, $x$ e $x + 1$ con probabilità 1/3, 1/3, 1/3.
   - Da $x$ si salta in $x + 2$ e $x - 1$ con probabilità 1/2, 1/2.

(30) **ESERCIZIO**. Fissiamo $P$ matrice stocastica $I \times I$ e $\lambda$ distribuzione sul $I$. Sia $U_1, U_2, U_3, \ldots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite su $[0, 1]$. Facciamo una partizione di $[0, 1]$ in sottintervalli disgiunti $[0, 1] = \cup_{i\in I} A_i$ dove $A_i$ ha lunghezza $\lambda_i$ (se $\lambda_i = 0$ si puo' prendere come $A_i$ l'intervallo degenere $\emptyset$). Per ogni $i$ facciamo una partizione di $[0, 1]$ in sottintervalli disgiunti $[0, 1] = \cup_{j\in I} A_{i,j}$ dove $A_{i,j}$ ha lunghezza $P_{i,j}$ (se $P_{i,j} = 0$ si puo' prendere come $A_i$ l'intervallo degenere $\emptyset$). Introduciamo le funzioni

$$\begin{cases} G_0 : [0, 1] \to I\,, & G_0(u) = i \text{ se } u \in A_i\,, \\ G : I \times [0, 1] \to I & G(i, u) = j \text{ se } u \in A_{i,j}\,. \end{cases}$$

Si definisca $X_0 = G_0(U_0)$ ed iterativamente $X_n = G(X_{n-1}, U_n)$, $n \geq 0$.

Provare che $(X_n)_{n\geq 0}$ è $\mathrm{CM}(\lambda, P)$.

Nota: siccome i computer sanno simulare variabili aleatorie indipendenti uniformemente distribuite su $[0,1]$ questo è il modo coi cui si simula al computer la catena $\mathrm{CM}(\lambda, P)$.

(31) **ESERCIZIO**. Si consideri la passeggiata semplice asimmetrica su $\mathbb{Z}$ con $p = 2/3$ con partenza nell'origine. Sia

$$T := \sup\{n \geq 0 : X_T = 0\}\,.$$

(a) Dimostrare che $P(T < \infty) = 1$.
(b) Calcolare $\mathbb{T}(X_{T+1} = 1 | T < \infty)$.

(32) **ESERCIZIO**. Si consideri la catena di Markov a tempi continui $(X_t)_{t\geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1,2,3,4\}$, distribuzione iniziale $\lambda = (1/4, 2/4, 1/4, 0)$ e generatore

$$Q = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di salto associata a $Q$.
(b) Calcolare la probabilità che nell'intervallo $[0,2]$ la catena non salti
(c) Calcolare la probabilità che nell'intervallo $[0,2]$ la catena faccia esattamente un salto.
(d) Calcolare la probabilità che nell'intervallo $[0,2]$ la catena visiti in ordine cronologico gli stati 1,2,3.

(33) **ESERCIZIO**. Si consideri una catena di Markov a tempi continui con 2 stati e con generatore

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare $e^{tQ}$ (ad esempio diagonalizzando la matrice).
(b) Supponendo che $\lambda = (1/3, 2/3)$ calcolare la distribuzione di $X_{100}$
(c) Supponendo che $\lambda = (1/3, 2/3)$ calcolare la probabilità dell'evento $\{X_{100} = 1, X_{105} = 2\}$.

**SVOLGIMENTO ESERCIZIO 32** (a)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/5 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(J_1 > 2)$. Condizioniamo sullo stato iniziale:

$$\mathbb{P}(J_1 > 2) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \mathbb{P}(J_1 > 2 | X_0 = i)\,.$$

Sappiamo che rispetto a $\mathbb{P}(\cdot | X_0 = i)$ la v.a. $J_1 = S_1$ è esponenziale di parametro $q_i$ e quindi $\mathbb{P}(J_1 > 2 | X_0 = i) = e^{-q_i 2}$. Concludiamo che

$$\mathbb{P}(J_1 > 2) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \mathbb{P}(J_1 > 2 | X_0 = i) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e^{-q_i 2} = \frac{1}{4} e^{-6/4} + \frac{2}{4} e^{-10} + \frac{1}{4}\,. \qquad (0.2)$$

(c) TRACCIA. Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2)$. Condizioniamo su $Y_0 = X_0$ e $Y_1$. Si noti che se parto da 3 non salto mai, mentro con probabilita' zero parto da 4. Quindi mi posso restringere ai soli casi $Y_0 = 1, 2$. Ho

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2) = &\sum_{j=2,3,4} \mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2 | Y_0 = 1, Y_1 = j) P(Y_0 = 1, Y_1 = j) \\ &+ \sum_{j=1,3} \mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2 | Y_0 = 2, Y_1 = j) P(Y_0 = 2, Y_1 = j)\,. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Consideriamo per esempio $\mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2)$. Sappiamo che rispetto a $\mathbb{P}(\cdot | Y_0 = 1, Y_1 = 2)$ le v.a. $S_1, S_2$ sono indipendenti e sono esponenziali di parametro $q_1 = 3/4$ e $q_2 = 5$ rispettivamente. Quindi

$$\mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2) = \mathbb{P}(S_1 \leq 2,\ S_2 > 2 - S_1 | Y_0 = 1, Y_1 = 2)$$
$$= \int_0^2 ds_1 \frac{3}{4} e^{-\frac{3}{4}s_1} e^{-5(2-s_1)} = \frac{3}{4} e^{-10} \int_0^2 ds_1 e^{(5-\frac{3}{4})s_1} = \frac{3}{4} e^{-10} \int_0^2 ds_1 e^{\frac{17}{4}s_1} = \frac{3}{4} e^{-10} \frac{4}{17} [e^{\frac{17}{4}2} - 1]$$

In generale, con $q_i \neq q_j$,

$$\mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2 | Y_0 = i, Y_1 = j) = \mathbb{P}(S_1 \leq 2,\ S_2 > 2 - S_1 | Y_0 = i, Y_1 = j) =$$
$$\int_0^2 ds_1 q_i e^{-q_i s_1} e^{-q_j(2-s_1)} = q_i e^{-2q_j} \int_0^2 ds_1 e^{(q_j - q_i)s_1} = \frac{q_i}{q_j - q_i} e^{-2q_j} [e^{2(q_j - q_i)} - 1] = \frac{q_i}{q_j - q_i} [e^{-2q_i} - e^{-2q_j}]\,.$$

Il suddetto calcolo e (0.3) danno

$$\mathbb{P}(J_1 \leq 2,\ J_2 > 2) = \sum_{(i,j)} \frac{q_i}{q_j - q_i} [e^{-2q_i} - e^{-2q_j}] \lambda_i \Pi_{i,j}\,,$$

dove $(i, j)$ assume valori $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3)$.

(d) Dobbiamo calcolare

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3, J_2 < 2)$$

Possiamo scrivere

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3, J_2 \leq 2) = P(J_2 \leq 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3) P(Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3)\,.$$

Abbiamo che

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3) = \lambda_1 \Pi_{1,2} \Pi_{2,3} = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{3}{5} = \frac{1}{20}\,.$$

Dobbiamo calcolare ora

$$P(J_2 \leq 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3) = P(S_1 + S_2 \leq 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3)\,.$$

Sappiamo che rispetto a $P(\cdot | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3)$ le v.a. $S_1$ e $S_2$ sono esponenziali, indipendenti di parametro $q_1 = 3/4$ e $q_2 = 5$, rispettivamente. Quindi

$$P(S_1 + S_2 \leq 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3) = \int_0^2 ds_1 q_1 e^{-s_1 q_1} \int_0^{2-s_1} q_2 e^{-s_2 q_2}$$
$$= \int_0^2 ds_1 q_1 e^{-s_1 q_1} [1 - e^{-q_2(2-s_1)}] = \int_0^2 ds_1 q_1 e^{-s_1 q_1} - e^{-2q_2} q_1 \int_0^2 ds_1 e^{(q_2 - q_1)s_1}$$
$$= [1 - e^{-2q_1}] - \frac{q_1}{q_2 - q_1} [e^{-2q_1} - e^{-2q_2}] = [1 - e^{-\frac{3}{4}}] - \frac{3}{17} [e^{-\frac{3}{2}} - e^{-10}]\,.$$

Mettendo insieme tutti i pezzi abbiamo

$$P(Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3, J_2 < 2) = \frac{1}{20} [1 - e^{-\frac{3}{4}}] - \frac{3}{340} [e^{-\frac{3}{2}} - e^{-10}]\,.$$