## ESAME DI MATEMATICA 25.02.19. TRACCIA DELLE SOLUZIONI

**ESERCIZIO 1**. La distribuzione è bimodale ed i valori della moda sono 6 euro e 9 euro che hanno frequenza pari a 4. La mediana è $(x_5+x_6)/2 = (7+7)/2 = 7$. Il primo quartile è $x_3 = 6$ ed il terzo quartile è $x_8 = 9$.

La media campionaria è

$$\bar{x} = \frac{6\times 4 + 9\times 4 + 7\times 2}{10} = \frac{674}{10} = 7.4.$$

La varianza campionaria è

$$\sigma^2 = \frac{(1.4)^2\times 4 + (1.6)^2\times 4 + (0.4)^2\times 2}{9} = \frac{7.84 + 10.24 + 0.16}{9} = 2.02667.$$

**ESERCIZIO 2**. Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Per il Teorema di Cramer, si hanno o infinite soluzioni oppure il sistema è inconsistente. Si nota che la prima equazione può essere ricavata dalla somma della terza più due volte la seconda. Il sistema originario risulta quindi equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ \quad\; y - 3z & = 7. \end{cases}$$

Ricaviamo le soluzioni per sostituzione dopo aver posto $z = t$. Allora $y = 7 + 3t$ e $x = -7 - 5t$. Quindi, al variare di $t \in \mathbb{R}$, si ha che le infinite soluzioni sono $x = -7 - 5t$, $y = 7 + 3t$ e $z = t$.

**ESERCIZIO 3**. Definiamo $y = \frac{2x+1}{x-3}$. Vale $y = \frac{2+1/x}{1-3/x}$. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{2+0}{1-0} = 2\,,$$

da cui $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+1}{x-3}} = \lim_{x\to+\infty} e^y = e^{\lim_{x\to+\infty} y} = e^2$.

**ESERCIZIO 4**. Scriviamo $f(x) = (x+2)^{1/2} = g(h(x))$ con $h(x) = x + 2$ e $g(x) = x^{1/2}$. Abbiamo $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ e $h'(x) = 1$, quindi

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}\cdot 1 = \frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}\,.$$

In modo analogo abbiamo

$$f''(x) = \frac{1}{2}D(x+2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+2)^{-1/2-1} = -\frac{1}{4}(x+2)^{-3/2}\,,$$

e

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}D(x+2)^{-3/2} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)(x+2)^{-3/2-1} = \frac{3}{8}(x+2)^{-5/2}\,.$$

Il polinomio $P_3(x)$ di Taylor del terzo ordine in $x_0 = 1$ è dato da

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2}3^{-1/2}(x-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}3^{-3/2}\right)(x-1)^2 + \frac{1}{6}\frac{3}{8}3^{-5/2}(x-1)^3 \qquad (1) \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-1) - \frac{1}{8}3^{-3/2}(x-1)^2 + \frac{1}{16}3^{-5/2}(x-1)^3 \,. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 5**. Posto $g(t) = cos(2t)$ come da formulario si sa che la soluzione è della forma $y(t) = Ce^{G(t)}$ dove $G$ è una primitiva di $g$. Come primitiva prendiamo $G(t) = \sin(2t)/2$, quindi $y(t) = Ce^{\sin(2t)/2}$. Per trovare $C$ imponiamo che $5 = y(\pi)$, quindi $5 = Ce^{\sin(2\pi)/2} = Ce^0 = C$ (abbiamo usato che $\sin(2\pi) = 0$). Quindi $C = 5$ e di conseguenza la soluzione è $y(t) = 5e^{\sin(2t)/2}$.

**ESERCIZIO 6 per S.A.** Per linearità del valore atteso $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$. Siccome $X, Y$ sono indipendenti, abbiamo che $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. Ci basta quindi calcolare il valore atteso e la varianza di $X, Y$ e poi sommare. Abbiamo

$$\begin{aligned} &E(X) = 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 0\,, \\ &E(X^2) = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 1\,, \\ &\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0^2 = 1\,, \\ &E(Y) = 0\frac{1}{4} + 1\frac{2}{4} + 2\frac{1}{4} = 1\,, \\ &E(Y^2) = 0^2\frac{1}{4} + 1^2\frac{2}{4} + 2^2\frac{1}{4} = 3/2\,, \\ &\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 3/2 - 1^2 = 1/2\,. \end{aligned}$$

Ne deriva che $E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0 + 1 = 1$ e $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 1 + 1/2 = 3/2$.

**ESERCIZIO 6 per B.C.** Una primitiva di $x + \frac{3}{x}$ è $x^2/2 + 3\ln x$. Quindi

$$\begin{aligned} &\int_{e^2}^{e^5} (x + \frac{3}{x})dx = [x^2/2 + 3\ln x]_{e^2}^{e^5} = \\ &\quad e^{10}/2 + 3\ln(e^5) - e^4/2 - 3\ln(e^2) = e^{10}/2 + 3\cdot 5 - e^4/2 - 3\cdot 2 = 9 + e^{10}/2 - e^4/2\,. \end{aligned}$$