ESAME 29.01.2018

CORREZIONE

ESERCIZIO 1

- La moda è 2 dato che è il valore più frequente.
- La mediana è 2

Infatti i valori ottenuti in ordine cresente $x_1 \dots x_{20}$ sono

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3

e la mediana è data da $\frac{x_{10}+x_{11}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

- La media campionaria è $\bar{x} = \frac{6\times3+9\times2+3\times1+2\times0}{20}$

$$= \frac{18+18+3}{20} = \frac{39}{20} = 1,95$$

ESERCIZIO 2

$|x| \leq 10$ se e solo se $x \in [-10, 10]$

Studiamo ora la disuguaglianza $2x^2-8x+6 \geq 0$ che equivale a $x^2-4x+3 \geq 0$. $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot3$ $= 16-12 = 4$, cioè $\Delta = 4$. Quindi

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 \mp 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{2}{2} = 1 \\ \\ \frac{6}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Quindi segno$(x^2-4x+3) =$
```
+  0  −  0  +
───●─────●───
   1     3
```

e $x^2-4x+3 \geq 0$ se e solo se $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

Le soluzioni del sistema sono l'intersezione di $[-10, 10]$ con $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. Quindi x è soluzione del sistema se e solo se

$$x \in [-10, 1] \cup [3, 10]$$

ESERCIZIO 3

$$\frac{3x^3-2x^2+1}{x-5} = \frac{x^3\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x\,(1-5/x)} = \overset{+\infty}{\overset{\uparrow}{x^2}}\;\frac{\left(\overset{3}{\overset{\Uparrow}{3}}-\overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{2}{x}}}+\overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{1}{x^3}}}\right)}{\underset{1}{\underset{\downarrow}{1}}-\underset{0}{\underset{\downarrow}{5/x}}}$$

Quindi $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{x-5} = \dfrac{+\infty\cdot 3}{1} = +\infty$

ESERCIZIO 4

$f(x) = 6x^3 - 2\cos(3x)$

$f'(x) = 6\,(3x^2) - 2\cdot 3\,(-\sin(3x)) = 18\,x^2 + 6\,\sin(3x)$

$f''(x) = 18\cdot(2x) + 6\cdot 3\,\cos(3x) = 36\,x + 18\cos(3x)$

ESERCIZIO 5

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x}$, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

Per teo fondamentale del calcolo integrale ho

$$\int (e^{2x} - x^2)\,dx = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\log 3} = \frac{e^{2\cdot\log 3}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0}}{2} - \frac{(\log 3)^3}{3} + \frac{0^3}{3}$$

$$= \frac{\underset{\underset{e^{2\log 3} = (e^{\log 3})^2 = 3^2 = 9}{\uparrow}}{9}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{(\log 3)^3}{3} = 4 - \frac{(\log 3)^3}{3}$$

ESERCIZIO 6 (SC. AMBIENTALI)

Sia X la vincita algebrica. X assume valori $10, -3, -2$

e $P(X=10) = 1/6$ $P(X=-3) = \frac{3}{6}$ $P(X=-2) = \frac{2}{6}$

$E[X] = 10\cdot\frac{1}{6} - 3\cdot\frac{3}{6} - 2\cdot\frac{2}{6} = \frac{10-9-4}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

calcoliamo ora $\mathrm{Var}(X)$ usando la formula

$\mathrm{Var}[X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Abbiamo $E[X^2] = 10^2 \frac{1}{6} + (-3)^2 \frac{3}{6} + (-2)^2 \cdot \frac{2}{6}$

$$= \frac{100 + 9\times3 + 4\times2}{6} = \frac{100+27+8}{6} = \frac{135}{6}$$

$$= \frac{45}{2}$$

Otteniamo $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{45}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$$= \frac{45}{2} - \frac{1}{4} = \frac{90-1}{4} = \frac{89}{4}$$

ESERCIZIO 6 (BENI CULTURALI)

Chiamo (x, y, z) il vettore.

Deve essere
$$\begin{cases} y + 3z = 0 & \leftarrow \text{ortogonalità a } (0,1,3) \\ 2x - y - z = 0 & \leftarrow \text{ortogonalità a } (2,-1,-1) \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2 \end{cases}$$

Risolvo il sistema $\begin{cases} y+3z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-3z \\ 2x+3z-z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-3z \\ 2x=-2z \end{cases}$ $\begin{cases} y=-3z \\ x=-z \end{cases}$

Quindi il vettore è della forma $(-z, -3z, z)$

Impongo che abbia norma 2:

$$2 = \sqrt{(-z)^2+(-3z)^2+z^2} = \sqrt{z^2+9z^2+z^2} = \sqrt{11z^2}$$

Quindi $4 = 11z^2$, $z = \pm\sqrt{\frac{4}{11}}$.

Ho 2 soluzioni

$$\left(-\sqrt{\frac{4}{11}}, -3\sqrt{\frac{4}{11}}, \sqrt{\frac{4}{11}}\right)$$

$$\left(+\sqrt{\frac{4}{11}}, 3\sqrt{\frac{4}{11}}, -\sqrt{\frac{4}{11}}\right)$$