COMPITO 6.6.2018

ESERCIZIO 1

Ordino i dati in modo crescente

40, 60, 62, 65, 67, 68, 69, 70, 70, 70, 70, 72, 74, 74, 80, 80, 80, 85, 85, 94

Moda = valore con massima frequenza = 70

Mediana campionaria $= \frac{10° \text{ valore} + 11° \text{ valore}}{2} = \frac{70+70}{2} = 70$

Media campionaria $= \frac{\text{somma di tutti i valori}}{20} = \frac{1.435}{20} = 71,75$

1° quartile $= \frac{5° \text{ valore} + 6° \text{ valore}}{2} = \frac{67+68}{2} = 67,5$

3° quartile $= \frac{15° \text{ valore} + 16° \text{ valore}}{2} = \frac{80+80}{2} = 80$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \log_{10} x > 1000 \\ x^2 - 9x + 18 > 0 \end{cases}$$

$\log_{10} x > 1000$ se e solo se $x > 10^{1.000}$ ($\log_{10} x$ è funzione crescente)

Considero $x^2 - 9x + 18$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9.$

$x^2 - 9x + 18 = 0$ se e solo se $x = x_{1,2} = \frac{9 \mp \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{9 \mp 3}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ \searrow 6 \end{smallmatrix}$

Ho $x^2 - 9x + 18 > 0$ se e solo se $x < 3$ o $x > 6$.

Quindi

$$\begin{cases} \log_{10} x > 1000 \\ x^2 - 9x + 18 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 10^{1000} \\ x < 3 \text{ o } x > 6 \end{cases} \iff x > 10^{1000}$$

Soluzione: $x > 10^{1000}$

ESERCIZIO 3

$$\pi \frac{3x^2 - 1}{12x^4 - 3x} = \frac{\pi x^2 (3 - 1/x^2)}{x^4 (12 - \frac{3}{x^3})} = \frac{\pi (3 - 1/x^2)}{x^2 (12 - \frac{3}{x^3})} \to \frac{\pi \cdot 3}{\infty} = 0$$

$\sin(\cdot)$ è continua e $\sin 0 = 0$.

Quindi $\lim_{x \to \infty} \sin\left(\pi \frac{3x^2 - 1}{12x^4 - 3x}\right) = \sin 0 = 0$

ESERCIZIO 4

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{D\sin(2x)\cdot\cos x - \sin(2x)\, D\cos x}{(\cos x)^2} = \frac{2\cos(2x)\cdot\cos x + \sin(2x)\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos(2x)}{\cos x} + \frac{\sin(2x)\cdot\sin x}{(\cos x)^2}.$$

$$f''(x) = 2\cdot\frac{D\cos(2x)\cdot\cos x - \cos(2x)\, D\cos x}{(\cos x)^2}$$

$$+ \frac{D(\sin(2x)\cdot\sin x)(\cos x)^2 - D((\cos x)^2)\sin(2x)\cdot\sin x}{(\cos x)^4}$$

$$= 2\cdot\frac{-2\sin(2x)\cdot\cos x + \cos(2x)\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$+ \frac{(2\cos(2x)\cdot\sin x + \sin(2x)\cos x)(\cos x)^2 - (-2\cdot\cos x)\sin x)\sin 2x\cdot\sin x}{(\cos x)^4}$$

$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0$

Quindi $f'(0) = 2\cdot\frac{1}{1} + \frac{0\cdot 0}{1} = 2$

$$f''(0) = 2\cdot\frac{-2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0}{1^2} + \frac{(2\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1)1^2 - (-2\cdot 1\cdot 0)0\cdot 0}{1^4}$$

$$= 0$$

Polinomio di Taylor:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$= 0 + 2x + 0x^2 = 2x$$

In alternativa per chi ha studiato trigonometria:

vale $\sin(2x) = 2\sin x\cdot\cos x \Rightarrow f(x) = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x} = 2\sin x$

e tutto si semplificava...

ESERCIZIO 5

Primitiva di $e^{3x} = \frac{1}{3} e^{3x}$

Primitiva di $3x^2 = x^3$

$\Rightarrow$ Primitiva di $e^{3x} - 3x^2 = \frac{e^{3x}}{3} - x^3$

$$\int_{-1}^{3} \left(e^{3x} - 3x^2\right) dx = \left(\frac{e^{3x}}{3} - x^3\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{e^9}{3} - 27\right) - \left(\frac{e^{-3}}{3} - (-1)\right)$$

$$= \frac{e^9}{3} - 28 - \frac{e^{-3}}{3}$$

ESERCIZIO 6

Primitiva di $e^{2t} = \frac{1}{2} e^{2t}$

Soluzioni: $y(t) = 4 \cdot \frac{1}{2} e^{2t} + C = 2e^{2t} + C$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 7 x BENI CULTURALI

$$\begin{cases} 2x - 4 = 6x + 2y \iff -4x - 4 = 2y \iff y = -2x - 2 \\ 3y = x + 5 \end{cases}$$

$2x + 10 - 6y = 0$

Sostituisco $y = -2x - 2$ nella 2^a eq: $3(-2x-2) = x + 5 \iff -6x - 6 = x + 5$

$\iff -11 = 7x \iff x = -\frac{11}{7}$

Ho $y = -2x - 2 = -2 \cdot \left(-\frac{11}{7}\right) - 2 = \frac{22}{7} - 2 = \frac{22 - 14}{7} = \frac{8}{7}$.

La 3^a eq. equivale a $x + 5 - 3y = 0 \iff 3y = x + 5$

e quindi è una copia della 2^a.

Soluzione: $x = -\frac{11}{7}$, $y = \frac{8}{7}$.

ESERCIZIO 7 PER SC. AMBIENTALI

a) $p = \dfrac{50 \times 50 \times 50}{100 \times 100 \times 100} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

b) Ho 100 casi favorevoli: (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3) . . . (100,100,100)

I casi equiprobabili sono $100 \times 100 \times 100$.

$$p = \frac{100}{100 \times 100 \times 100} = \frac{1}{100 \times 100} = \frac{1}{10.000}$$