CALCOLO DELLE PROBABILITÀ I. a.a. 2013/2014
DIARIO DELLE LEZIONI

- **Settimana 5-7 marzo.** principio fondamentale del calcolo combinatorio, permutazioni, combinazioni, teorema del binomio, coefficienti multinomiali, triangolo di Tartaglia.

Esercizi del libro di testo: 1,3,4,7,13 del cap.I

- **Settimana 10-14 marzo.**
il numero di soluzioni intere (non negative, o positive) dell'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$. Definizione di spazio di probabilità e sue proprietà elementari. Spazi di probabilità con esiti equiprobabili.

Esercizi del libro di testo: 10,11,14,16, 17,18,19,21,22,31 (Cap I). 10, 15,35 (Cap II).

- **Settimana 17-21 marzo.** Alcune proprietà degli spazi di probabilità (v. sezione I file di integrazioni), principio di inclusione-esclusione, applicazione al problema degli accoppiamenti, non esistenza di spazi di probabilità con esiti equiprobabili e spazio campionario infinito numerabile.

Esercizi del libro di testo: 9, 17, 18, 36, 28, 37, 41, 39, 33, 43,44,45,46,47,48 (Cap II). Altro esercizio: "7 persone, tra cui Pierpaolo e Lorenzo, si incontrano per cenare insieme. Il tavolo del ristorante è rotondo e i commensali si siedono a caso. Determinare la probabilità che Pierpaolo e Lorenzo siano seduti vicini"

- **Settimana 24-28 marzo.** Completamento della sezione I del file di integrazioni, successioni monotone di eventi, continuità della probabilità per successioni monotone di eventi (applicazione al problema : determinare la prob. che lanciando infinite volte una moneta esca sempre testa). Probabilità condizionata, regola del prodotto, teorema della probabilità totale (se $F_1, F_2, \dots, F_n$ è una famiglia di eventi a due a due disgiunti la cui unione dà S e tali che $P(F_i) > 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, allora per ogni evento $E \subset S$ vale $P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$. il teorema resta vero considerando una successione $F_1, F_2, \dots, \dots$).

Esercizi del libro di testo: 50,51,52,53 (Cap II), 1,2,4,5,6 (Cap III)

- **Settimane 31 Marzo - 11 Aprile.** Rapporto a favore di un evento, def. di indipendenza di 2 eventi, def. di indipendenza di 3 eventi, def. di indipendenza di una famiglia finita di eventi, la probabilità condizionata $P(\cdot|F)$ è una funzione di probabilità definita sulla famiglia degli eventi $\mathcal{P}(S)$ (sezione 3.5 libro).

Si consideri il lancio di 2 monete oneste. Siano E, F, G gli eventi definiti come E = "la prima moneta dà testa", F = "la seconda moneta dà testa", G = "entrambe le monete danno la stessa faccia". È facile verificare che E, F sono indipendenti, F, G sono indipendenti e E, G sono indipendenti, ma $P(E \cap F \cap G) \neq P(E)P(F)P(G)$. Quindi E, F, G non sono indipendenti.

Si osservi inoltre che E non è indipendente da $F \cap G$. Invece vale il seguente fatto:

Fatto. *Siano A, B, C tre eventi indipendenti. Allora A è indipendente da ogni evento costruito a partire da B, C tramite unioni, intersezioni, e complementare*

Esempi scelti dal libro discussi a lezione: Esempio 3a (I parte, II parte), Esempio 3d, Esempio 3f, Esempio 3j della seconda edizione che equivale all'Esempio 3k della terza edizione, Esempio 3k della seconda edizione che equivale all'Esempio 3l della terza edizione, Esempio 4f, Esempio 5a.

Esercizi del libro di testo: 9,10, 13, 15, 17, 28, 35, 43, 48, 49, 64, 65, 66 (Cap III)

- **Settimane 28 Aprile -9 maggio** . Variabile aleatoria. Funzione di distribuzione. Proprietà generali della funzione di distribuzione (ultima sez. cap IV). variabile aleatoria discreta. densità di probabilità. valore atteso di una v.a. discreta. valore atteso di una funzione di v.a. discreta. linearità del valore atteso. varianza. monotonia del valore atteso: il valore atteso di una v.a. discreta non negativa è non negativo. varianza di una v.a.

Fatto: *Una v.a. X discreta ha varianza sempre nonnegativa. La varianza è nulla se e solo se esiste una costante c tale che $P(X = c) = 1$. In tale caso deve essere $c = E(X)$*

Criterio per l'esistenza di v.a. discrete nota la densità discreta (vedi Prop. 5 del file di integrazione con $m = 1$). Variabile aleatoria di Bernoulli (definizione, media, varianza). V.a. Binomiale (definizione, andamento della densità discreta). V.a. di Poisson (definizione, media)

Esercizi del libro di testo, capitolo 4: 1,5,6,13,14,17,18,19,21,25 (terza edizione), 28, 35,38,40, 41, 48, 49

- **Settimane 12 Maggio-23 Maggio** . Legge dei piccoli numeri, ovvero: teorema di approssimazione della v.a. binomiale con v.a. di Poisson (vedasi note integrative). Variabile aleatoria geometrica: definizione, calcolo della media, proprietà di perdita di memoria (vedasi note integrative). Variabile binomiale negativa. Variabile Ipergeometrica. Sezione 4.9 della terza edizione (no esempio 9e)

Delle note integrative: variabili aleatorie m -dimensionali, densità marginale, densità congiunta, indipendenza di variabili aleatorie, criterio di indipendenza di v.a. discrete tramite la fattorizzazione della densità discreta congiunta, criterio di indipendenza di v.a. discrete tramite la fattorizzazione della funzione di distribuzione congiunta (solo enunciato), covarianza di v.a. e sue proprietà, varianza della somma di variabili aleatorie.

Esercizi del libro di testo, capitolo 4: 51, 52, 53, 71, 74, 75, 78,79, 83 (solo terza edizione), 84 (solo terza edizione)

- **Settimana 26 Maggio-30 Maggio** . Bilinearità della covarianza (vedi note integrative). Calcolo media e varianza di v.a. binomiale $\text{Bin}(n,p)$ scrivendola come somma di n v.a. di Bernoulli di parametro p indipendenti. Calcolo media e varianza di v.a. binomiale negativa di parametri r, p scrivendola come somma di r v.a. geometriche di parametro p indipendenti. Calcolo media della ipergeometrica. [Vedasi esempi 2e,2f,2g capitolo 7, della seconda/terza edizione].

La somma di binomiali indipendenti di tipo $B(n,p)$ e $B(m,p)$ è binomiale di tipo $B(n+m,p)$ (vedasi note integrative).

La somma di due variabile aleatorie di Poisson di parametri λ, μ rispettivamente è una v.a. di Poisson di parametro $\lambda + \mu$ (vedasi note integrative).

Discussione dell'esempio 2j, cap 7 (seconda/terza edizione)

Esercizi del libro di testo, capitolo 6: 1,2,6,7,11. Capitolo 7: 7,33.

Esercizio: siano X, Y variabili aleatorie. X assume valori $-1, 2$, Y assume valori $-2, 0, 3$. La loro densità congiunta $p_{X,Y}$ è data da $p_{X,Y}(-1, -2) = 1/6$, $p_{X,Y}(-1, 0) = 2/6$, $p_{X,Y}(-1, 3) = 0$, $p_{X,Y}(2, -2) = 1/6$, $p_{X,Y}(2, 0) = 1/6$, $p_{X,Y}(2, 3) = 1/6$. Determinare $p_X, p_Y, F_X, F_Y, E(Y), E(3X^2Y - X), \text{Var}(3X - Y)$. Dire inoltre se X e Y sono indipendenti giustificando la risposta.

- **Lezioni conclusive . Argomenti esclusi dalla verifica scritta e soggetti a sola verifica orale.** Valore atteso di un prodotto di variabili aleatorie indipendenti (corollario 2 , sez. 6 note integrative). Valore atteso condizionato (sez. 10 note integrative); legge di una v.a. (sezione 11 note integrative, no dimostrazione), disuguaglianza di Markov (sez. 8.1, cap. 8 ross), disuguaglianza di Chebyshev (sez. 8.2, cap. 8 ross), legge debole dei grandi numeri (sez. 8.2 cap. 8 ross), legge forte grandi numeri (sez. 8.4 cap. 8 ross, solo enunciato) e suo collegamento con l'interpretazione frequentistica (si veda discussione dopo teo. 4.1 in sez. 8.4 cap. 8 ross). Definizione di v.a. continua e di funzione di densità (sez. 5.1 cap. 5 ross), il valore atteso di una v.a. continua X con funzione di densità $f(x)$ è definito come $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, la relativa varianza è definita come nel caso discreto: $\text{var}(X) = E([X - EX]^2)$. La v.a. uniforme: definizione, calcolo media e varianza (sez. 5.3 cap 5 ross), la v.a. normale di media μ e varianza σ^2 :definizione, grafico della funzione di densità (vedasi prima parte della sez. 5.4 nel cap.5 del ross). teorema di De Moivre - Laplace (solo enunciato, vedasi sez. 5.4.1 del cap. 5 del ross).