PROCESSI STOCASTICI 2019-20, DIARIO DELLE LEZIONI

Nota: tutti gli enunciati sono da intendersi con dimostrazione. Proposizioni/lemmi/teoremi trattati senza dimostrazione sono esplicitamente indicati.

(1) **24.09, 27.09**. Distribuzioni e matrici stocastiche. Grafo orientato pesato associato ad una matrice stocastica. Definizione di catena di Markov a tempo discreto. Proprietà equivalenti alla definizione di CM (v. [3, Thm 1.1.1] and Prop.1.1 in [1]). Proprietà di Markov [3, Thm.1.1.2]. Calcolo della probabilitià di vedere stati fissati a tempi fissati (per una famiglia finita di tempi): esercizio 1 dell'eserciziario (da considerare come parte della teoria).
Esercizi: 1,2,3,4,5 eserciziario
Totale ore: 4

(2) **1.10, 4.10** Conseguenze della proprietà di Markov per catene di Markov a tempo discreto (v. [1, Sez.2]). Simulazione di catene di Markov (v. [1, Sez.3]). Conduzione $i \to j$, classi comunicanti, classi comunicanti chiuse, stati assorbenti, catene irriducibili, [3, Thm.1.2.1]. Tempi di arrivo (raggiungimento) di un insieme $A \subset I$ (hitting times). Caratterizzazione delle probabilità di arrivo (probabilità di assorbimento) tramite sistemi lineari [3, Thm.1.3.2]). Calcolo probabilità di transizione in catene di Markov a 2 stati [3, Esempio 1.1.4].
Esercizi: 6,8,9 eserciziario
Totale ore: 8

(3) **8.10, 11.10** Rovina del giocatore [3, Example 1.3.3]. Sez. 4 in [1]: passeggiate aleatorie su grafi non orientati, passeggiata simmetrica su $\mathbb{Z}^d$, passeggiata asimmetrica su $\mathbb{Z}$. Tempo di arresto e proprietà di Markov forte [3, Thm.1.4.2]. Esercizi: 7 punto (a), 10 eserciziario.
Totale ore: 12

(4) **18.10** *(la lezione del 16.10 è stata annullata)* Dimostrazione della proprietà di Markov forte (v. [1]). Caratterizzazione con sistema lineare del valore atteso dei tempi di arrivo (hitting times): [3, Thm. 1.3.5] (la dimostrazione fatta è solo sulla prima parte del teorema e non sulla proprietà che i valori attesi degli hitting times formano la soluzione minimale non negativa). Definizione di stati ricorrenti e transienti.
Esercizi: 7 punto (b), 14 eserciziario
Totale ore: 14

(5) **22.10, 25.10+ 15 minuti extra**. Teorema di dicotomia per ricorrenza e transienza (Thm.1.5.3 in [3] con lemma 1.5.1 e lemma 1.5.2). Proprietà di ricorrenza e transienza: Theoremi 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6 e 1.5.7 in [3]. esempio di catena di markov irriducibile non ricorrente (passeggiata asimmetrica su $\mathbb{Z}$). se lo spazio degli stati è finito una classe comunicante è ricorrente se e solo se è chiusa, altrimenti è transiente.

Esercizio 11 eserciziario
Totale ore: 18+1/3

(6) **29.10+ 15 minuti extra**. Dimostrazione che la passeggiata asimmetrica su $\mathbb{Z}$ è transiente con la legge dei grandi numeri. Dimostrazione che la passeggiata asimmetrica su $\mathbb{Z}$ è transiente e che passeggiata simmetrica su $\mathbb{Z}$ è ricorrente con l'accoppiamo con la rovina del giocatore. Dimostrazione che la passeggiata asimmetrica su $\mathbb{Z}$ è transiente e che la passeggiata simmetrica su $\mathbb{Z}$ è ricorrente con lo studio della serie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)}$. Teorema di Polya per la passeggiata simmetrica semplice su $\mathbb{Z}^d$. Stazionarietà: Sez.6 in [1]. Reversibilità: definizioni 7.1, 7.2 e 7.3 in [1].
Esercizio 1.6.2 del libro [3] assumendo di sapere il teorema di Polya per la passeggiata simmetrica semplice su $\mathbb{Z}^3$.
Totale ore: 20+2/3

(7) **5.11 , 8.11+ 15 minuti extra**. Reversibilità: prop. 7.4 e prop. 7.5 in [1]. Classificazione delle distribuzioni invarianti: [3, Thm. 1.7.5], [3, Thm. 1.7.7] solo enunciato, tutta la sezione 8 di [1].
Esercizi: 16 e 17 eserciziario
Totale ore: 24+3/3=25

(8) **12.11 , 15.11+ 15 minuti extra**. Periodo: tutta la sezione 9 di [1]. Teorema di convergenza all'equilibrio: solo enunciato del [3, Thm. 1.8.3], enunciato e dimostrazione del [1, Teo. 10.1].
Esercizi: 36 e 37 eserciziario
Totale ore: 29+1/3

(9) **19.11 , 22.11**. Le lezioni sono state annullate

(10) **26.11, 29.11 + 15 minuti**. Teorema ergodico (v.[3, Thm.1.10.2]).
Catena di Metropolis a partire da una matrice stocastica simmetrica ([2, Chp.3]). Applicazioni al problema di ottimizzazione:ricerca del valore massimo e dei punti di massimo di una funzione su un grafo regolare finito connesso (v.[2, Chp.3]). Catena di Metropolis con matrice di transizione iniziale asimmetrica. Applicazione al problema di approssimare la cardinalità di un grafo connesso.
Esercizi: 19,21,22,23, 24
Totale ore: 33+2/3

(11) **3.12 +15 minuti extra**. (Lezione del 6.12 annullata)
Proprietà dei tempi esponenziali. Q-matrice e sua rappresentazione grafica. Matrice di salto. Processi continui a destra minimali. Esplosione e stato cimitero. Definizione di catena di Markov a tempo continuo definita con catena di salto e tempi di permanenza. Vedasi file integrazioni, sezioni 11,12,13
Esercizi: 28, 29 senza il punto in cui si chiedono le distribuzioni invarianti.
Totale ore: 35+3/3=36

(12) **13.12**.
Simulazione di catene di Markov a tempo continuo [1, Prop.13.4]. Condizioni sufficienti per evitare l'esplosione [1, Prop.13.6]. Esempi di catene di markov a tempo continuo: processo di Poisson, processo di nascita, processo di nascita e morte (v. [1, Sez.13]).
Totale ore: 38

(13) **17.12 , 18.12, 20.12** .
Perdita di memoria in CTMC [1, Sez.14]. Classi comunicanti in catene di Markov a tempo continuo [1, Sez.15]. Tempi di raggiungimento e probabilità di assorbimento [1, Sez.16]. Ricorrenza e transienza in catene di Markov a tempo continuo [1, Sez.17]. Caratterizzazioni equivalenti alla definizione di CTMC per spazio degli stati finito [1, Sez.18]. Generatore di una catena di Markov ed equazioni differenziali per le funzioni $t \mapsto \mathbb{P}(X_t = i)$ e $t \mapsto \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ [1, Sez.19].
Totale ore: 44

(14) **07.01, 10.01**
Definizione di processo gaussiano [1, Def.22.8]. Definizione del moto Browniano e del moto Browniano standard [1, Sez.23]. Enunciati dei teoremi Thm. 23.2 e 23.3 in [1]. Come ottenere un moto Browniano da un moto Browniano standard tramite trasformazione affine: [1, Prop.24.1]. Invarianza della famiglia dei moti Browniani per riscalamenti spaziali e riscalamenti temporali: [1, Prop.24.2], [1, Prop.24.3]. Il moto Browniano è un processo gaussiano [1, Prop.24.4]. Covarianza di B_t, B_s per il moto Browniano [1, Prop.24.5]. Alcune equazioni differenziali associate al moto Browniano [1, Sez. 25]. Definizione del moto Browniano multidimensionale [1, Def.26.1].
Esercizi: 31,32,33,34,35,38,39
Totale ore: 48

References

[1] A. Faggionato; *Integrazioni al corso di Processi Stocastici a.a. 2018/2019*. Disponibili online.
[2] D.A. Levin, Y. Peres, E.L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. Disponibile online.
[3] J. Norris; *Markov chains*. Cambridge University Press.