

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (20/12/05)

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 min.

ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente gioco a premi. Vi sono due mazzi di carte da gioco: un mazzo da 40 e un mazzo da 52. Si lancia una moneta truccata per cui la probabilità di ottenere testa è $1/4$. Se il lancio della moneta dà testa allora si estraggono senza rimpiazzo 4 carte dal mazzo da 40, altrimenti si estraggono senza rimpiazzo 4 carte dal mazzo da 52. Si vincono 1000 euro se le 4 carte sono tutte degli assi o hanno tutte lo stesso seme.

- 1) Determinare la vincita media.
- 2) Si ripete il gioco in modo indipendente fino al verificarsi di una vincita. Chiamato T il numero di giocate effettuate (incluso nel conteggio di T la giocata vincente) determinare $E(T)$, $Var(T)$ e $E(T^2)$.

Nota: è sufficiente indicare le soluzioni dei punti 1) e 2) in termini di espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali

ESERCIZIO 2

- 1) Dire se esistono variabili aleatorie X e Y , con X a valori in $\{0, 2\}$ e Y a valori in $\{-1, 0, 1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	1/6	1/6	0
2	1/3	1/6	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(0, -1) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0, 0) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0, 1) = 0, \dots$).

- 2) In caso affermativo determinare la densità discreta di X e di Y , la funzione di distribuzione di X e calcolare $E(10X + 3Y)$, $E(XY)$ e $Var(X)$ (dare il risultato esplicito come numero frazionario svolgendo i calcoli). Dire inoltre se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

ESERCIZIO 3 (I dati di questo esercizio sono di pura fantasia e non molto realistici)

La Banca Intesa ha nella città di Udine 3 sportelli Bancomat. Tipicamente, in un dato giorno il numero X_i di volte in cui lo sportello Bancomat i -esimo viene utilizzato è dato da una variabile di Poisson di parametro λ_i , con $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 50$, $\lambda_3 = 20$. X_1 , X_2 e X_3 sono indipendenti. Chiamiamo X il numero totale di utilizzi in un dato giorno degli sportelli Bancomat della Banca Intesa nella città di Udine.

- 1) Determinare il valor medio e la varianza di X (dare il risultato esplicito).
- 2) Qual è la densità discreta di X ?
- 3) Assumendo che in un dato giorno ogni sportello Bancomat sia non funzionante per motivi tecnici con probabilità 0.01 e che il verificarsi di problemi tecnici in un singolo sportello sia indipendente dallo stato degli altri sportelli, determinare il numero medio di sportelli Bancomat della Banca Intesa funzionanti in un dato giorno nella città di Udine (dare il risultato esplicito).

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $\mathbb{E}(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $\mathbb{E}(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1 - p)$ dove $p = m/N$.