

**Esame di Probabilità I 11/09/2012. Canale con docente A. Faggionato.
Tempo a disposizione: 3 ore**

Non è consentito l'uso di calcolatrici né di materiale didattico.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1.

All'inizio dell'estate Pierpaolo e William si iscrivono ad un centro estivo. Alla segreteria del centro estivo spiegano che i bambini verranno divisi a caso in squadre da 10 bimbi (verrà accettato soltanto un numero di iscritti multiplo di 10). Alla fine si iscrivono 20 bambini: 15 maschietti e 5 femminucce.

- (a) Determinare la probabilità che Pierpaolo e William stiano nella stessa squadra.
- (b) Determinare la probabilità che via sia una squadra di soli maschietti.
- (c) Sapendo che Pierpaolo e William sono nella stessa squadra, determinare la probabilità che vi sia una squadra di soli maschietti.

Nota: in questo esercizio non sono richiesti i calcoli espliciti: soluzioni contenenti fattoriali e/o coefficienti binomiali vanno bene

ESERCIZIO 2.

Alberto e Bruno decidono di giocare alla morra cinese. Il gioco funziona come segue. Ad ogni round, i giocatori scelgono tra forbice, carta e sasso e il vincitore si determina con le regole seguenti: il sasso vince sulle forbici, le forbici vincono sulla carta, la carta vince sul sasso (se entrambi dicono lo stesso simbolo, c'è parità e nessuno vince o perde).

Si effettuano 3 round. Sia A il numero di round vinti da Alberto e B il numero di round vinti da Bruno.

- (a) Determinare la legge di $A + B$.
- (b) Determinare la legge di A sapendo che $A + B = 3$.
- (c) Calcolare esplicitamente la covarianza tra A e B .

Si supponga ora di effettuare infiniti round. Sia A_n il numero di round vinti da Alberto nei primi n round.

- (d) Provare che con probabilità 1 vale $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$.

ESERCIZIO 3.

A Roma si svolge una competizione di Triathlon (consiste in tre gare consecutive: una di ciclismo, una di corsa e poi una di nuoto). Queste sono le previsioni per un generico atleta:

- Con probabilità $1/4$ si ritira dalla gara di ciclismo. Condizionato al fatto che non si ritiri, il tempo impiegato per arrivare al traguardo è distribuito secondo una v.a. uniforme sull'intervallo $[40, 60]$ (il tempo è misurato in minuti)
 - Supponiamo che l'atleta abbia concluso la gara di ciclismo (senza ritirarsi, quindi). In tal caso con probabilità $1/3$ si ritira dalla gara di corsa. Condizionato al fatto che non si ritiri dalla gara di corsa, il tempo impiegato per arrivare al traguardo è distribuito secondo una v.a. uniforme sull'intervallo $[60, 80]$, indipendentemente dalla prestazione nella gara di ciclismo.
 - Supponiamo che l'atleta abbia concluso sia la gara di ciclismo che la gara di corsa. In tal caso con probabilità $1/4$ si ritira dalla gara di nuoto. Condizionato al fatto che non si ritiri dalla gara di nuoto, il tempo impiegato per arrivare al traguardo è distribuito secondo una v.a. uniforme sull'intervallo $[40, 60]$, indipendentemente dalla prestazione nella gara di ciclismo e nella gara di corsa.
- (a) Determinare la varianza di una generica v.a. uniformemente distribuita nell'intervallo $[a, b]$
 - (b) Determinare la probabilità che l'atleta completi tutte e tre le gare senza ritirarsi.
 - (c) Sapendo che l'atleta ha svolto tutte e tre le gare senza ritirarsi, determinare il valore atteso del tempo impiegato per svolgere le tre gare.
 - (d) Sapendo che l'atleta ha svolto tutte e tre le gare senza ritirarsi, determinare la varianza del tempo impiegato per svolgere le tre gare.

Nota: nei punti (b),(c) la soluzione deve essere data come numero al piu' frazionario (ovvero: fate i calcoli!). nel punto (d) la soluzione puo' essere data come somma o differenza di numeri frazionari, es. $8/9 - 3/5 + 4/6$