Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2015-2016 , 12 Febbraio 2016

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Tempo a disposizione: 2 ore** .
- **Solo nei punti con scritto "calcolare esplicitamente" i calcoli vanno svolti e la soluzione deve essere data come numero frazionario a/b. Per gli altri punti non è richiesto lo svolgimento dei calcoli**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

ESERCIZIO 1. Si estraggono 8 carte da un mazzo di 40 carte.

(a) Si vincono 3 euro per ogni asso estratto e si perdono 2 euro per ogni fante estratto. Calcolare esplicitamente il valore atteso della vincita.

(b) Determinare la probabilità che via siano esattamente 3 coppie nelle 8 carte estratte (cioè che il numero di valori che compaiono in esattamente 2 carte è pari a 3).

ESERCIZIO 2. Vi sono 10 uomini (2 italiani, 2 francesi, 2 tedeschi, 2 spagnoli e 2 russi) e 10 donne (2 italiane, 2 francesi, 2 tedesche, 2 spagnole e 2 russe) che si ritrovano ad una cena organizzata da un'agenzia matrimoniale. Nel ristorante vi sono 10 tavolini e ad ogni tavolino vengono fatti sedere (scegliendoli a caso) un uomo e una donna, così da formare 10 coppie.

(a) Calcolare esplicitamente il valore medio del numero di coppie formate da un uomo e una donna della stessa nazionalità.

(b) Determinare la probabilità che ciascuna coppia sia formata da un uomo e una donna della stessa nazionalità.

ESERCIZIO 3. Vi sono 10 famiglie che vogliono andare a Vienna (tra cui la famiglia Rossi). Ciascuna famiglia sceglie, indipendentemente dalle altre, il mezzo di trasporto e l'hotel nel seguente modo:

- Con probabilità 0.4 la famiglia si reca a Vienna in pullman. In tal caso (cioè condizionatamente all'andare in pullman) la famiglia sceglie un hotel a 2 stelle con probabilità 0.2 e un hotel a 3 stelle con probabilità 0.8.
- Con probabilità 0.6 la famiglia si reca a Vienna in aereo. In tal caso (cioè condizionatamente all'andare in aereo) la famiglia sceglie un hotel a 2 stelle con probabilità 0.5 e un hotel a 3 stelle con probabilità 0.5.

(a) Calcolare esplicitamente media e varianza del numero di famiglie (tra le 10 in considerazione) che alloggiano a Vienna in un albergo a 3 stelle.

(b) Sia X il numero di famiglie (tra le 10 in considerazione) che alloggiano a Vienna in un albergo a 3 stelle e sia Y il numero di famiglie (tra le 10 in considerazione) che vanno a Vienna in pullman. Dire se X e Y sono indipendenti, giustificando la risposta.

(c) Sapendo che la famiglia Rossi alloggia a Vienna in un hotel a 3 stelle, calcolare esplicitamente la probabilità che si sia recata a Vienna in pullman.

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1.
(a) X :=numero assi estratti, Y :=numero fanti estratti. X, Y sono variabili aleatorie ipergeometriche di parametri $N = 40, m = 4, n = 8$. Quindi $E(X) = E(Y) = mn/N = 4 \cdot 8/40 = 0.8$. Per linearità del valore atteso $E(3X-2Y) = 3E(X)-2E(Y) = 0.8$. Il valore atteso della vincita è quindi 0.8.
(b) $p = \frac{\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}4\cdot 4}{\binom{40}{8}}$ Infatti ho $\binom{40}{8}$ esiti possibili, dove per esito intendiamo un sottoinsieme non ordinato di 8 carte del mazzo. Per simmetria gli esiti sono equiprobabili. Per contare esiti favoreli osservo che ho $\binom{10}{3}$ modi per scegliere il valore delle 3 coppie (es. 3, 5, fante) e $\binom{7}{2}$ per scegliere il valore dei 2 singoletti (es. 8,9). Poi per ogni valore delle 3 coppie ho $\binom{4}{2}$ modi di scegliere i due semi della coppia e per ogni valore dei singoletti ho 4 modi per fissare il seme.

ESERCIZIO 2.
(a) Numero i tavoli da 1 a 10 e introduco le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_{10}$ come segue:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la coppia al tavolo } i\text{–esimo è formata da persone della stessa nazionalità,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vogliamo calcolare $E(X)$ dove $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Per linearità del valore atteso, $E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i)$. Per simmetria $E(X_i) = E(X_1)$. Ho $E(X_1)$=P(al tavolo 1 donna e uomo hanno stessa nazionalità). La probabilità che al tavolo 1 ci siano 2 italiani è data da $\frac{2}{10}\frac{2}{10}$. Lo stesso risultato vale se invece di italiani richiedo francesi, o tedeschi o spagnoli o russi. Quindi per additività concludo che

$$E(X_1) = P(\text{al tavolo 1 donna e uomo hanno stessa nazionalità}) = 5\frac{2}{10}\frac{2}{10} = \frac{2}{10}.$$

Ottengo quindi $E(X) = 10E(X_1) = 2$.

(b) Nomino gli uomini $I_1, I_2, F_1, F_2, T_1, T_2, S_1, S_2, R_1, R_2$, dove I_1 e I_2 sono italiani, F_1 e F_2 sono francesi,... Considero la sequenza $(x_1, \dots, x_{10})$ dove x_1 è la donna che siede con I_1, x_2 è la donna che siede con I_2, x_3 è la donna che siede con F_1, x_4 è la donna che siede con F_2,...

Per simmetria le sequenze $(x_1, \dots, x_{10})$ sono equiprobabili e in tutto sono 10!. Le sequenze favorevoli sono quelle in cui x_1, x_2 sono le 2 donne italiane (ho 2! modi per fissare x_1, x_2), x_3, x_4 sono le 2 donne francesi (ho 2! modi per fissare x_3, x_4),...

Concludo quindi che $p = \frac{2^5}{10!}$.

ESERCIZIO 3
Siano X e Y come nel punto (b).
a) $X = Bin(10, p)$ dove p è la probabilità per una data famiglia (es la famiglia Rossi) di alloggiare in un albergo a tre stelle. Per la legge delle probabilità totale (condizionando sul prendere il pullman o l'aereo) ho $p = (0.4)(0.8) + (0.6)(0.5) = 0.62$. Abbiamo quindi $E(X) = 10p = 6.2$ e $Var(X) = 10p(1 - p) = 6.2 \cdot 0.38 = 2.356$.

b) $P(X = 10) = p^{10} = (0.62)^{10}$. Invece $P(X = 10|Y = 10) = (0.8)^{10}$. Quindi $P(X = 10) \neq P(X = 10|Y = 10)$, da cui derivo che X, Y non sono indipendenti.

c) Considero gli eventi A="la famiglia Rossi alloggia in un albergo a 3 stelle e B=la famiglia Rossi va in pullman. Per il teorema di Bayes ho

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{(0.4)(0.8)}{0.62} = \frac{32}{62}.$$