**ESAME DI PROCESSI STOCASTICI A.A. 2018-19 (15.02.2018)**

**DATI DELLO STUDENTE:**

- Nome e Cognome: ........................................................................................
- Numero di Matricola: ...................................................................................
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale martedì 19 febbraio
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale nella settimana 25.02 $\to$ 01.03

**Risolvere gli esercizi giustificando le risposte.**
**Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, testi e appunti personali.**

**ESERCIZIO 1**. Considerare la passeggiata $(X_n)_{n\geq 0}$ su $\mathbb{Z}$ con matrice di transizione

$$P_{x,y} = \begin{cases} 2/4 & \text{se } y = x+1\,, \\ 1/4 & \text{se } y = x\,, \\ 1/4 & \text{se } y = x-1 \\ 0 & \text{altrimenti }\,. \end{cases}$$

(a) Dire se la suddetta passeggiata è transiente o ricorrente.
(b) Calcolare la probabilità che, partendo da 1, 100 venga raggiunto prima di 0.

**ESERCIZIO 2**. Consideriamo una catena di Markov a tempo continuo $(X_t)_{t\geq 0}$ con spazio degli stati $\Omega = \{-1, 1\}^N$ descritta come segue. Arrivati alla configurazione $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ si attende un tempo esponenziale di valore atteso

$$1 + \text{ numero delle entrate di } \eta \text{ pari a "+1"}$$

e, finita l'attesa, si procede così: si sceglie a caso con uniforme probabilità un sito $x$ tra $\{1, 2, \dots, N\}$ e si salta da $\eta$ ad $\eta^{(x)}$, dove $\eta^{(x)}$ è ottenuta da $\eta$ cambiando il segno di $\eta_x$ e lasciando inalterate le altre entrate $\eta_y$ con $y \neq x$.

(a) Scrivere il generatore $Q$ della catena di Markov.
(b) Determinare le distribuzioni reversibili della catena di Markov.
(c) Determinare le distribuzioni invarianti della catena di Markov.
(d) Determinare stati ricorrenti, transienti, assorbenti.
(e) Definita la funzione "$f(\eta)$:=numero di entrate di $\eta$ pari a $+1$", determinare se esiste $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)ds$ ed eventualmente calcolarlo.

**ESERCIZIO 3**. Considerare un moto Browniano 1-dimensionale $(B_t)_{t\geq 0}$ che inizia nell'origine, con drift 3 e coefficiente di diffusione 4.

(a) Calcolare $\mathbb{E}[B_3 B_5 - 3B_4]$.

(b) Calcolare $\mathbb{E}[e^{B_3}]$.

**ESERCIZIO 4**. Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con spazio degli stati $\{0,1\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

La distribuzione iniziale è tale che la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ è stazionaria.

(a) Determinare che tipo di processo è $(X_{1000-n})_{0\leq n\leq 1000}$.