Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2015-2016 , 18 Gennario 2016

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Tempo a disposizione: 2 ore** .
- **Solo nei punti con scritto "calcolare esplicitamente" i calcoli vanno svolti e la soluzione deve essere data come numero frazionario a/b. Per gli altri punti non è richiesto lo svolgimento dei calcoli**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

ESERCIZIO 1. In un incontro di studenti erasmus, vi sono 10 studenti italiani, 10 studenti francesi, 10 studenti spagnoli e 10 studenti tedeschi. Si scelgono a caso 4 studenti tra i presenti, i quali descriveranno la loro esperienza.

(a) Determinare la probabilità che tra gli studenti scelti ve ne siano 3 della stessa nazionalità e uno di nazionalità diversa.

(b) Calcolare esplicitamente $E(X)$ e $E(X^2)$, dove X indica il numero di studenti italiani scelti.

(c) Chiamato Y il numero di studenti francesi scelti e Z il numero di studenti spagnoli scelti, si determini la densità congiunta di X, Y, Z

(d) Dire se X, Y e Z sono v.a. indipendenti giustificando la risposta.

(e) Determinare la probabilità che vi sia almeno una nazione con esattamente un solo studente scelto.

ESERCIZIO 2. Ad una festa di bambini Lorenzo e Pierpaolo hanno ricevuto ciascuno 4 caramelle. In particolare, Lorenzo ha ricevuto 3 caramelle alla frutta e una alla menta, mentre Pierpaolo ha ricevuto 2 caramelle alla frutta e 2 alla menta. Lorenzo regala 1 caramella a Pierpaolo scegliendola a caso. Arrivato a casa Pierpaolo regala 2 caramelle alla mamma, scegliendole a caso tra le 5 a disposizione.

(a) Denominando con X il numero di caramelle alla frutta ricevute dalla mamma, determinare la densità discreta di X e calcolare esplicitamente $E(X)$.

(b) Calcolare esplicitamente la probabilità che Lorenzo abbia dato a Pierpaolo 1 caramella alla frutta, sapendo che la mamma ha ricevuto da Pierpaolo 2 caramelle alla frutta.

ESERCIZIO 3. Un esperimento consiste nel generare una stringa di 10 cifre allineando a caso le 10 cifre da 0 a 9. Si consideri il numero 0 come numero pari.

(a) Calcolare esplicitamente $E(X)$, dove X è il numero di cifre dispari che nella stringa hanno a destra e a sinistra una cifra pari.

(b) Si ripete l'esperimento fino a quando appare una stringa che inizia con 0 e finisce con 9. Calcolare esplicitamente il valore atteso del numero di volte che si è ripetuto l'esperimento.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1.
a) Ho $\binom{40}{4}$ modi per scegliere 4 studenti tra 40 e per simmetria gli esiti sono equiprobabili. Per scegliere 4 studenti di cui 3 della stessa nazionalità e uno di nazionalità diversa, ho 4 modi per scegliere la nazionalità che si ripete, $\binom{10}{3}$ modi per scegliere 3 studenti di quella nazionalità e 30 modi per scegliere lo studente della nazionalità che non si ripete. Per principio fondamentale combinatoria la probabilità richiesta è

$$\frac{4\binom{10}{3}30}{\binom{40}{4}} .$$

b) X è v.a. ipergeometrica di parametri $n = 4, N = 40, m = 10$. Posto $p = m/N = 1/4$ dalle formule ottengo

$$E(X) = \frac{nm}{N} = \frac{4 \cdot 10}{40} = 1$$

Per calcolare $E(X^2)$ osservo che dalle formule ottengo

$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p) = \frac{40-4}{40-1} 4(1/4)(3/4) = \frac{9}{13} .$$

Concludo:

$$E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \frac{9}{13} + 1 = \frac{22}{13} .$$

c) vale

$$p_{X,Y,Z}(a,b,c) = \begin{cases} \frac{\binom{10}{a}\binom{10}{b}\binom{10}{c}\binom{10}{4-(a+b+c)}}{\binom{40}{4}} & \text{con } a,b,c \geq 0 \text{ interi con } a+b+c \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti ho $\binom{40}{4}$ modi (equiprobabili) per scegliere 4 studenti tra 40. Per calcolare $p_{X,Y,Z}(a,b,c) = P(X=a, Y=b, Y=c)$ mi resta da contare gli esiti favorevoli: ho $\binom{10}{a}$ modi per scegliere a italiani, ho $\binom{10}{b}$ modi per scegliere b francesi, ho $\binom{10}{c}$ modi per scegliere c spagnoli e ho $\binom{10}{4-(a+b+c)}$ modi per scegliere i rimanenti $4-(a+b+c)$ studenti tra i tedeschi.
D) X, Y, Z non sono indipendenti. Infatti $P(X=4, Y=4) = 0$ mentre $P(X=4) = P(Y=4) > 0$. Quindi non puo' essere $P(X=4, Y=4) = P(X=4)P(Y=4)$ che invece deve essere verificata se X, Y, Z fossero indipendenti (e quindi anche indipendenti a coppie).
e) **Primo metodo**. Chiamo Italia, Francia, Spagna, Germinia nazioni 1,2,3,4 rispettivamente. Introduco l'evento $E_i :=$"la nazione i ha esattamente uno studente scelto". Dobbiamo calcolare $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$. Applico il principio di inclusione-esclusione.

Osservo che, per simmetria, $P(E_i) = P(E_1)$ per ogni i; $P(E_iE_j) = P(E_1E_2)$ per ogni coppia i,j con $i \neq j$; $P(E_iE_jE_k) = P(E_1E_2E_3)$ per ogni terna i, j, k di indici distinti.

Ora li calcolo (nel compito va spiegato il calcolo):
$P(E_1) = \frac{10\binom{30}{3}}{\binom{40}{4}}$
$P(E_1E_2) = \frac{10 \cdot 10\binom{20}{2}}{\binom{40}{4}}$
$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{10^4}{\binom{40}{4}}$.

Per principio inclusione-esclusione e per le suddette identità concludo come segue:

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) &= \sum_{i=1}^{4} P(E_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P(E_iE_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P(E_iE_jE_k) - P(E_1E_2E_3E_4) \\
&= 4P(E_1) - \binom{4}{2} P(E_1E_2) + \binom{4}{3} P(E_1E_2E_3) - P(E_1E_2E_3E_4) \\
&= 4\frac{10\binom{30}{3}}{\binom{40}{4}} - \binom{4}{2}\frac{10 \cdot 10\binom{20}{2}}{\binom{40}{4}} + 3\frac{10^4}{\binom{40}{4}}.
\end{aligned}
$$

Secondo metodo.Sia $F := E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$. Dobbiamo calcolare $P(F)$. Ho $P(F) = 1 - P(F^c)$. L'evento F^c equivale al fatto che per ogni nazione ho 0 studenti o almeno 2 studenti tra quelli scelti. Ne deriva che ho solo 2 casi possibili: F_1:="vi è una nazione con 4 studenti tra quelli scelti", F_2 :=" vi sono due nazioni con esattamente 2 studenti tra quelli scelti".

Ho $P(F_1) = 4\frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}$ e $P(F_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}}$. Concludiamo quindi che

$$
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = 1 - 4\frac{\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}} - \frac{\binom{4}{2}\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}}
$$

ESERCIZIO 2. Sia $A :=$"Lorenzo dà a Pierpaolo una caramella alla frutta". Ho $P(A) = 3/4$ e $P(A^c) = 1/4$.Se si verifica A allora Pierpi sceglie le 2 caramelle tra 5 di cui 3 alla frutta e 2 alla menta, mentre se si verifica A^c allora Pierpi sceglie le 2 caramelle tra 5 di cui 2 alla frutta e 3 alla menta. Per la legge delle probabilità totali abbiamo

$$P(X=k) = P(X=k|A)P(A) + P(X=k|A^c)P(A^c)\,.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{3}{4} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{1}{4} = \frac{1}{10}\frac{3}{4} + \frac{3}{10}\frac{1}{4} = \frac{6}{40}\,,\\
P(X=1) &= \frac{3\cdot 2}{\binom{5}{2}}\frac{3}{4} + \frac{2\cdot 3}{\binom{5}{2}}\frac{1}{4} = \frac{6}{10}\frac{3}{4} + \frac{6}{10}\frac{1}{4} = \frac{24}{40}\,,\\
P(X=2) &= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{3}{4} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{1}{4} = \frac{3}{10}\frac{3}{4} + \frac{1}{10}\frac{1}{4} = \frac{10}{40}
\end{aligned}$$

Concludiamo che la densità discreta di X è data da

$$p_X(a) = \begin{cases} \frac{6}{40} & a=0 \\ \frac{24}{40} & a=1 \\ \frac{10}{40} & a=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre $E(X) = 1\cdot\frac{24}{40} + 2\frac{10}{40} = \frac{44}{40}$. b) Per teorema di Bayes

$$P(A|X=2) = \frac{P(X=2|A)P(A)}{P(X=2)} = \frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\frac{3}{4}}{10/40} = \frac{9}{10}\,.$$

ESERCIZIO 3 a) Considero la v.a. X_i definita come

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se nelle entrate i-1 e i+1 ho cifra pari, nell'entrata i ho cifra dispari,} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La prima e l'ultima entrata della stringa non possono contenere cifra dispari con accanto cifre pari. Quindi $X = \sum_{i=2}^{9} X_i$. Per linearità del valore atteso ho

$$E(X) = \sum_{i=2}^{9} E(X_i) = \sum_{i=2}^{9} P(X_i = 1)$$

Considerando solo cosa metto nelle entrate i-1, i e i+1 della stringa, ho $P(X_i = 1) = \frac{5\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8}$. Quindi $E(X) = 8\frac{5\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{100}{90}$

b) Il numero N di esperimenti è v.a. geometrica di parametro $p = P$(la prima cifra è 0 e l'ultima cifra è 9)$= \frac{1}{90}$. Quindi $E(N) = \frac{1}{p} = 90$