ESAME DI PROCESSI STOCASTICI A.A. 2019-20 (18.09.2020)

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....
- Indicare eventuali vincoli per l'orale:..

Risolvere gli esercizi giustificando le risposte.
Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, testi e appunti personali.

ESERCIZIO 1. Considerare la passeggiata aleatoria semplice asimmetrica su $\mathbb{Z}$ che inizia nell'origine e che salta a destra con probabilità $2/3$ e a sinistra con probabilità $1/3$.

(a) Calcolare la probabilità di raggiungere lo stato 5 prima dello stato -2.

ESERCIZIO 2. Considerare la passeggiata aleatoria semplice simmetrica $(X_n)_{n\geq 0}$ su $\mathbb{Z}^2$ che inizia nell'origine.

(a) Calcolare la probabilità di visitare gli stati $(1000, -56)$ e $(34, -5)$.
(b) Calcolare la probabilità che $X_8 = (2, 0)$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 2/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare classi comunicanti, classi comunicanti chiuse, stati ricorrenti, stati transienti, stati assorbenti.
(c) Determinare tutte le distribuzioni invarianti.
(b) Sapendo che la catena di Markov inizia con distribuzione iniziale $\lambda = (1/8, 2/8, 3/8, 2/8, 0)$ dire se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = X_0)$ e in caso affermativo calcolarlo.

ESERCIZIO 4. Siano $(Y_t)_{t\geq 0}$ and $(Z_t)_{t\geq 0}$ due moti Browniani indipendenti che iniziano nell'origine, con drift rispettivamente pari a 4 e -5 e con coefficiente di diffusione rispettivamente pari a 2 e 6.

(a) Dire se il processo a tempo continuo $(X_t)_{t\geq 0}$ dato da $X_t := Y_t + Z_t$ è un moto Browniano giustificandone la risposta. Inoltre, in caso affermativo, determinare punto iniziale, drift, coefficiente di diffusione.
(b) Dire se il processo a tempo continuo $(W_t)_{t\geq 0}$ dato da $W_t := |Y_t| + |Z_t|$ è un moto Browniano giustificandone la risposta. Inoltre, in caso affermativo, determinare punto iniziale, drift, coefficiente di diffusione.