ESAME DI PROCESSI STOCASTICI A.A. 2019-20 (30.06.2020)

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale in un altro appello
- Indicare eventuali vincoli per l'orale:..

Risolvere gli esercizi giustificando le risposte.
Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, testi e appunti personali.

ESERCIZIO 1. Considerare la catena di Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ a tempo continuo con spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e Q–matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare classi comunicanti chiuse e non chiuse, stati transienti, stati ricorrenti, stati assorbenti.
(b) Calcolare la probabilità di visitare l'insieme $A := \{2, 3\}$ per la catena di Markov che inizia nello stato 1.
(c) Calcolare $\mathbb{P}_4(X_1 = 5, X_3 = 4)$.

ESERCIZIO 2. Considerare il vettore gaussiano bidimensionale $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ con matrice di covarianza

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e vettore medio $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Scrivere funzione di densità del vettore Y.
(b) Determinare matrice di covarianza e il vettore medio del vettore gaussiano Z definito come

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 3. Si considera la seguente catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$ avente come spazio degli stati l'insieme $\{A,B\}^3$ dato dalle parole di lunghezza tre formate con le lettere A e B.

La transizione da X_n a X_{n+1} della catena di Markov è determinata in questo modo:

- indipendentemente dall'evoluzione precedente, si sceglie con uniforme probabilità una delle tre entrate della parola X_n;
- se la lettera dell'entrata scelta appare esattamente 1 volta in X_n, allora va cambiata (quindi se tale lettera era A diventerà B , se tale lettera era B diventerà A);
- se la lettera dell'entrata scelta appare 2 volte in X_n, allora con probabilità 1/3 si cambia la lettera dell'entrata scelta e con probabilità 2/3 non si cambia la lettera dell'entrata scelta;
- se la lettera dell'entrata scelta appare 3 volte in X_n, allora non si fa alcuna modifica;
- X_{n+1} è definita come la stringa risultante.

(a) Calcolare la probabilità

$$\mathbb{P}_{(AAB)}(X_1 = ABB,\, X_2 = ABA,\, X_3 = AAA,\, X_4 = AAA)$$

(b) Determinare classi comunicanti chiuse e non chiuse, stati transienti, stati ricorrenti, stati assorbenti.

(c) Determinare distribuzioni invarianti e distribuzioni reversibili.

(d) Per ogni $\eta \in \{A,B\}^3$ calcolare il valore atteso $\mathbb{E}_\eta[T_\eta]$ dove $T_\eta := \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = \eta\}$.