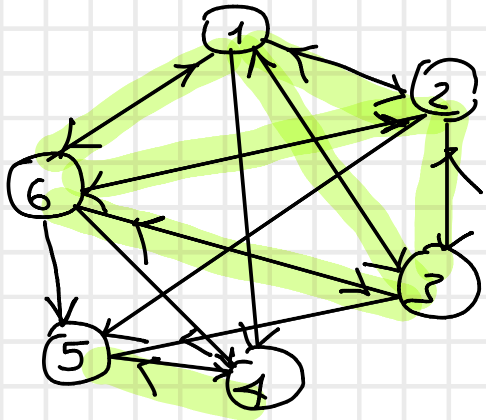
ESERCIZIO 1

Il grafo della MC è

Ho evidenziato in verde i doppi-sensi.



a) $\{1,2,3,6\}$ c.c. non chiusa, $\{4,5\}$ c.c. chiusa

$|I|<\infty \Rightarrow 1,2,3,6$ transienti e $4,5$ ricorrenti

non ci sono stati assorbenti

$H_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$

b) $h_1 = ?$ $\quad h_i := \mathbb{P}_i(H_A < +\infty)$ $\quad A := \{2,3\}$

$(h_i)_i$ risolve il sistema

$$\begin{cases} -5h_1 + h_2 + 2h_3 + h_4 + h_6 = 0 \\ -h_4 + h_5 = 0 \\ 2h_4 - 2h_5 = 0 \\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 - 5h_6 = 0 \end{cases}$$

Dato che $h_2 = 1$ $h_3 = 1$, $h_5 = h_4 = 0$ (classe chiusa)

ho $\begin{cases} -5h_1 + 1 + 2 + h_6 = 0 \\ h_1 + 1 + 1 - 5h_6 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -5h_1 + 3 + h_6 = 0 \\ h_1 + 2 - 5h_6 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow h_6 = 5h_1 - 3$, $h_1 + 2 - 25h_1 + 15 = 0 \Rightarrow h_1 = 17/24$

Risposta: $\mathbb{P}_1(H_{\{2,3\}} < +\infty) = \frac{17}{24}$ ✓

c) $\{4,5\}$ è c.c. chiusa. La catena, partendo da 4, si comporta come MC con spazio $\hat{I} = \{4,5\}$ e Q-generatore

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ho $\mathbb{P}_4(X_1=5, X_3=4) = P(1)_{4.5}\, P(2)_{5,4}$

dove $P(t) = e^{t\hat{Q}}$.

Per calcolare $P(t)$ diagonalizzo $\hat{Q}$.

$$\det(\lambda I - \hat{Q}) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -2 & \lambda+2 \end{bmatrix} = \lambda^2+3\lambda+2-2 = \lambda(\lambda+3)$$

$\hat{Q}$ ha autovalori: 0 e -3. 0 ha autovettore $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\hat{Q}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \text{ IFF } \begin{cases} -a+b=-3a \\ 2a-2b=-3b \end{cases} \text{ IFF } b=-2a$$

Prendo $v_2 := \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, allora $\hat{Q}v_2 = -3v_2$

Quindi
$$[v_1|v_2]^{-1}\hat{Q}[v_1|v_2] = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$\hat{Q} = [v_1|v_2]\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}[v_1|v_2]^{-1}. \quad \text{dove } [v_1|v_2] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

Quindi $P(t) = e^{t\hat{Q}} = [v_1|v_2]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{pmatrix}[v_1|v_2]^{-1}$.

$$[v_1|v_2]^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ e^{-3t} & -e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2+e^{-3t} & 1-e^{-3t}\\ 2-2e^{-3t} & 1+2e^{-3t}\end{bmatrix}$$

Conclusione: $\mathbb{P}_4(X_1=5, X_3=4) = P(1)_{4,5}\, P(2)_{5,4}$

$$= \frac{1}{3}(1-e^{-3})\frac{1}{3}(2-2e^{-6}) = \frac{1}{9}(2-2e^{-6}-2e^{-3}+2e^{-9})$$

ESERCIZIO 2

a)

$f(y_1, y_2)$:= funzione di densità di Y

A = matrice di covarianza di Y, $b = \mathbb{E}Y$

$$\Rightarrow f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\det A)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - b\right) \cdot A^{-1}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - b\right)\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 7$

$$\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - b\right) \cdot A^{-1}\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - b\right) = \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 + 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y_1 - 2 - y_2 - 2 \\ -y_1 + 1 + 4y_2 + 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 - 4 \\ -y_1 + 4y_2 + 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\left\{ (y_1 - 1)(2y_1 - y_2 - 4) + (y_2 + 2)(-y_1 + 4y_2 + 9) \right\}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{7}} \exp\left\{ -\frac{1}{14}\left\{ (y_1 - 1)(2y_1 - y_2 - 4) + (y_2 + 2)(-y_1 + 4y_2 + 9) \right\}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{14}\left(2y_1^2 - 2y_1y_2 + 4y_2^2 - 8y_1 + 18y_2 + 22\right)\right\}$$

b) $Z_1 = 2Y_1 - Y_2$
$Z_2 = 3Y_1 + Y_2$

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{Cov}(2Y_1 - Y_2, 3Y_1 + Y_2) = 6A_{11} + 2A_{12} - 3A_{12} - A_{22}$$
$$= 6 \cdot 4 - 1 - 2 = 21$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_1) = \mathrm{Cov}(2Y_1 - Y_2, 2Y_1 - Y_2) = 4A_{11} - 2A_{12} - 2A_{21} + A_{22}$$
$$= 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 2 = 14$$

$$\mathrm{Cov}(Z_2, Z_2) = \mathrm{Cov}(3Y_1+Y_2, 3Y_1+Y_2) = 9A_{11} + 6A_{12} + A_{22}$$

$$= 9\cdot 4 + 6\cdot 1 + 2 = 36+6+2 = 44$$

$$\mathrm{Cov}(Z) = \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 44 \end{bmatrix}$$

$$E(Z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3

d) $$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3^5}$$

scelgo 2ª entrata — cambio 2ª entrata — scelgo 3ª entrata — cambio 3ª entrata — scelgo 2ª entrata — cambio 2ª entrata

a) Gli stati AAA e BBB sono assorbenti.

Per gli altri stati, cambiando al più un'entrata alla volta posso raggiungere qualunque altro stato.

Quindi $\{AAA\}$, $\{BBB\}$, $I \setminus \{AAA, BBB\}$ sono c.c.

le prime due chiuse, la terza aperta.

$|I| < \infty \Rightarrow$ AAA e BBB sono ricorrenti
tutti gli altri stati sono transienti.

b) Se μ è distribuzione invariante, allora $\mu(x) = 0$ $\forall x$ transiente. Quindi μ invariante $\Rightarrow \mu = \alpha\delta_{AAA} + (1-\alpha)\delta_{BBB}$ con $\alpha \in [0,1]$.

Verifico che tutte queste μ sono sia invarianti che reversibili. Dato che "rev $\Rightarrow$ inv" ci basta verificare che $\mu := \alpha\delta_{AAA} + (1-\alpha)\delta_{BBB}$ è reversibile.

Sia $x \neq y$

Ho $\mu(x) P_{xy} \neq 0 \Rightarrow \mu(x) \neq 0$ e $P_{xy} \neq 0 \Rightarrow$

" $x = AAA$ e $y = AAA$ " oppure " $x = BBB$ e $y = BBB$ "

che è assurdo.

Quindi $\forall x \neq y \quad \mu(x) P_{xy} = 0 = \mu_y P_{yx}$.

Vale bilancio dettagliato $\Rightarrow \mu$ è reversibile.

Conclusione: μ è distr. inv $\Leftrightarrow \mu = \alpha\delta_{AAA} + (1-\alpha)\delta_{BBB}$ per qualche $\alpha \in [0,1] \Leftrightarrow \mu$ è distr. rev.

d) Se $\eta = AAA$ o $\eta = BBB$ la catena non salta mai.

Quindi $T_\eta = 1$ e $\mathbb{E}_\eta(T_\eta) = 1$.

Sia $\eta \neq AAA, BBB$. Allora η ha 2 entrate di tipo A e 1 di tipo B, o viceversa. Nel primo caso salto in AAA con prob $\frac{1}{3}$, nel 2° caso salto in BBB con prob $\frac{1}{3}$. Poi però resto nello stato assorbente e quindi $T_\eta = +\infty$. Ho perciò $\mathbb{P}_\eta(T_\eta = +\infty) > 0$.

Quindi $\mathbb{E}_\eta[T_\eta] = +\infty$