

**Esame di Probabilità I 21/09/2012. Canale con docente A. Faggionato.  
Tempo a disposizione: 3 ore**

**Non è consentito l'uso di calcolatrici né di materiale didattico.**

**FORMULARIO**

Se  $X$  è v.a. binomiale di parametri  $n, p$ , allora  $E(X) = np$ ,  $Var(X) = np(1 - p)$ .

Se  $X$  è v.a. geometrica di parametro  $p$ , allora  $E(X) = 1/p$ ,  $Var(X) = (1 - p)/p^2$ .

Se  $X$  è v.a. di Poisson con parametro  $\lambda$ , allora  $E(X) = \lambda$ ,  $Var(X) = \lambda$ .

Se  $X$  è v.a. ipergeometrica di parametri  $n, N, m$  (tipo: estraggo senza rimpiazzo  $n$  palline da un'urna con  $m$  palline bianche e  $N - m$  palline nere e  $X$  è il numero di palline bianche estratte) allora  $E(X) = nm/N$  e  $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$  dove  $p = m/N$ .

**Nota: in tutti i punti tranne il punto 1(iii) e il punto 2(iii) bisogna rispondere dando la soluzione sotto forma di numero razionale**

**ESERCIZIO 1.**

All'Istituto di Matematica di Oberwolfach organizzano conferenze. I partecipanti mangiano e dormono all'interno dell'Istituto. A pranzo e a cena si mangia in un grande salone. Immaginiamo una conferenza dal titolo "sistemi di particelle interagenti" con 30 persone. Nel salone per i pasti vi sono 5 tavoli da 6 persone. Le persone non sono libere di sedersi a mangiare con chi vogliono, dato che ad ogni posto c'è un bigliettino con il nome di chi si deve sedere e ad ogni pasto i biglietti vengono ridistribuiti (E' VERO!!!!).

Immaginiamo che l'assegnazione dei posti sia puramente casuale e venga fatta prima di ogni pasto: i camerieri mettono tutti i biglietti dentro un vaso, li mischiano e poi li prendono a caso dal vaso assegnandoli ai vari posti (al pasto successivo il tutto si ripete, di nuovo i biglietti nel vaso e poi l'estrazione).

Alla conferenza "Sistemi di particelle interagenti" prendono parte - tra gli altri - il Prof. Lorenzo Bertini della Sapienza, il Prof. Anton Bovier dell'Università di Bonn e il Prof. Herbert Spohn dell'Università di Monaco. Si supponga che la conferenza duri 3 giorni (comprensivi di 3 pranzi e 3 cene).

- (i) Determinare la probabilità che al pranzo del lunedì il Prof. Bertini e il Prof. Bovier si ritrovino a mangiare allo stesso tavolo.
- (ii) Determinare il valor medio del numero di volte in cui il Prof. Bertini e il Prof. Bovier mangiano insieme.
- (iii) Determinare la probabilità che vi sia almeno un pasto in cui il Prof. Bertini mangia con il Prof. Bovier o con il Prof. Spohn (eventualmente con entrambi). **Nota: non e' necessario svolgere tutti i calcoli**
- (iv) Determinare la probabilità che il Prof. Bertini mangi ad ogni pasto con persone nuove (quindi non gli capiti mai di mangiare almeno 2 volte assieme alla stessa persona).

**ESERCIZIO 2.**

In una giornata di bel tempo il numero di persone che visitano la basilica di San Pietro a Roma può essere pensato come una v.a. di Poisson di parametro 200, mentre in una giornata di brutto tempo lo stesso numero può essere pensato come

una v.a. di Poisson di parametro 150. Nel mese di Settembre le giornate di bel tempo sono tipicamente il 60 per cento.

- (i) Determinare il valore atteso, il momento secondo e la varianza del numero di visitatori della basilica di San Pietro in un giorno di Settembre.
- (ii) Usando la disuguaglianza di Markov dare una stima dall'alto della probabilità di avere 800 visitatori in una giornata di Settembre.
- (iii) Usando la disuguaglianza di Chebyshev dare una stima dall'alto della probabilità di avere 800 visitatori in una giornata di Settembre.
- (iv) Sapendo di aver avuto il 1 Settembre 300 visitatori alla Basilica di San Pietro, determinare la probabilità che il 1 Settembre sia stata una giornata di sole. **Nota: nel punto 2-(iii) non sono necessari i calcoli, basta una formula calcolabile avendo una buona calcolatrice**

### ESERCIZIO 3.

Un docente universitario deve preparare il testo d'esame per i suoi studenti. Si tratta del quinto appello scritto e il docente non ha più fantasia per inventare esercizi originali, quindi la preparazione diventa particolarmente lunga. Deve inventare 3 problemi. Supponiamo che il tempo per preparare il primo problema sia distribuito uniformemente nell'intervallo  $[30, 50]$  (il tempo è misurato in minuti), il tempo per preparare il secondo problema sia distribuito uniformemente nell'intervallo  $[50, 70]$  ed infine il tempo per preparare il terzo problema sia distribuito uniformemente nell'intervallo  $[50, 90]$ . Supponiamo che i tempi di preparazione dei singoli esercizi siano v.a. indipendenti.

- (i) Calcolare il valore atteso del tempo totale impiegato dal docente per preparare il compito.
- (ii) Calcolare la probabilità che nella preparazione del testo il docente impieghi non più di un'ora per esercizio.