ESAME DI PROCESSI STOCASTICI A.A. 2019-20 (23.01.2020)

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale nella settimana 27-31 gennaio
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale nella settimana 3-7 febbraio
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale in un altro appello

Risolvere gli esercizi giustificando le risposte.
Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, testi e appunti personali.

ESERCIZIO 1. Si consideri una catena di Markov a tempi discreti con spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare stati ricorrenti, transienti, assorbenti.
(b) Determinare tutte le distribuzioni invarianti.
(c) Determinare tutte le distribuzioni reversibili.
(d) Sapendo che la catena di Markov ha distribuzione iniziale uniforme, calcolare $\mathbb{P}(X_{T+1} = X_T | T < +\infty, X_T = 3)$ dove $T := \inf\{n \geq 2 \,:\, X_{n-2} = X_n\}$.

ESERCIZIO 2. Fissiamo $p \in (0, 1)$. Una parola in codice binario di lunghezza 4 è data da una stringa (a_1, a_2, a_3, a_4) con $a_i \in \{0, 1\}$.
Si consideri un meccanismo di trasmissione per cui vi è un mittente, K trasmettitori e un destinatario, tutti allineati. Il mittente comunica la parola scelta al primo trasmettitore, il quale la comunica al secondo trasmettitore, il quale la comunica al terzo trasmettitore e così via fino a che la parola arriva al trasmettitore K-esimo che la comunica al destinario. I trasmettitori funzionano in modo indipendente l'uno dall'altro però non sono perfetti: a volte la parola viene modificata. Più precisamente il generico trasmettitore trasmette la parola in modo scorretto con probabilità p e quando questo si verifica la parola trasmessa è data dalla parola ricevuta dal trasmettitore variata in esattamente un'entrata e tale entrata può essere la prima, la seconda, la terza o la quarta con uguale probabilità.

Supponiamo che il mittente scelga la parola $(0, 0, 0, 0)$ con probabilità $1/4$ e la parola $(0, 1, 0, 1)$ con probabilità $3/4$.

(a) Determinare il limite con $K \to \infty$ della probabilità che il destinatario riceva la parola $(0, 0, 0, 0)$.

ESERCIZIO 3. Si consideri un sistema instabile che può essere in due stati A e B. Il sistema può saltare da uno stato all'altro.
Le regole dinamiche sono le seguenti. Se al tempo zero oppure appena dopo un salto il sistema è nello stato A, allora il sistema resta tale per un tempo esponenziale di parametro 2 (indipendente dai precedenti tempi di permanenza) e poi cambia stato. Se al tempo zero oppure appena dopo un salto il sistema è nello stato B, allora il sistema resta tale per un tempo esponenziale di parametro 3 (indipendente dai precedenti tempi di permanenza) e poi cambia stato. Supponiamo che il sistema inizi nello stato A con probabilià 1/3 e nello stato B altrimenti.

(a) Determinare la probabilità che il sistema faccia infiniti salti nell'intervallo $[0, 10]$.
(b) Determinare la probabilità che il sistema sia nella stato A al tempo 10.

ESERCIZIO 4. Consideriamo un moto Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ con punto iniziale 2, drift 5 e coefficiente di diffusione 4. Considerare il vettore gaussiano $X = (B_1, B_2, B_5)$.

(a) Determinare valore atteso e matrice di covarianza di X.
(b) Determinare $\mathbb{E}[e^{B_1 - 6B_5}]$.