ESAME DI PROCESSI STOCASTICI A.A. 2019-20 (30.06.2020)

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....
- ☐ Barrare se si desidera fare l'esame orale in un altro appello
- Indicare eventuali vincoli per l'orale:..
  ....

Risolvere gli esercizi giustificando le risposte.
Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, testi e appunti personali.

ESERCIZIO 1. Considerare la catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$ con spazio degli stati $\{-1,1\}^2$ che evolve come segue. Nota la catena fino al tempo n, X_{n+1} è così determinato:

- si sceglie a caso con uniforme probabilità un'entrata della stringa X_n;
- se l'entrata scelta ha valore $+1$ allora con probabilità $1/3$ le si cambia di segno e con probabilità $2/3$ non le si cambia di segno,
- se l'entrata scelta ha valore -1 allora con probabilità $2/3$ le si cambia di segno e con probabilità $1/3$ non le si cambia di segno.
- si definisce X_{n+1} come la stringa così ottenuta.

(a) Determinare classi comunicanti, stati transienti, stati ricorrenti e stati assorbenti.
(b) Determinare le distribuzioni reversibili, se esistono.
(c) Sapendo che $X_0 = (1,1)$, determinare $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n}$ dove $F(n)$ è il numero di volte che la catena rivisita lo stato $(-1,-1)$ nell'intervallo temporare $\{1,2,\dots,n\}$.

ESERCIZIO 2. Considerare il moto Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ con punto iniziale 1, drift nullo e coefficiente di diffusione 2.

(a) Calcolare $\mathbb{P}(B_0 < B_1,\ B_2 < B_5)$.
(b) Dire se il processo a tempo continuo $(B_{t^2})_{t\geq 0}$ è un moto Browniano ed in caso affermativo determinare punto iniziale, drift e coefficiente di diffusione.
(c) Calcolare vettore medio e matrice di covarianza del vettore gaussiano $(B_1, B_3 - B_1, B_4)$.
(d) Determinare (se esiste) il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(B_{k+1}-B_k)^2$.

ESERCIZIO 3. Considerare la catena di Markov a tempo continuo $(X_t)_{t\geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1,2,3,4\}$ e generatore

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che $H_i := \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n = i\}$.

(a) Calcolare la probabilità $\mathbb{P}_1(H_2 < H_3)$.
(b) Calcolare la probabilità che la catena di Markov, partendo in 3, faccia esattamente un salto nell'intervallo $[0, 4]$.