

ESAME DI PROCESSI STOCASTICI A.A. 2018-19 (03.07.2019)

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome:
- Numero di Matricola:

Risolvere gli esercizi giustificando le risposte.

Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, testi e appunti personali.

ESERCIZIO 1. Considerare la catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n \geq 0}$ con spazio degli stati $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Determinare le classi comunicanti ed indicare quali sono chiuse e quali no.
- Determinare stati ricorrenti, assorbenti, transienti.
- Calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
- Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\lambda(X_n \in \{1, 5\})$, dove la distribuzione iniziale λ è data da $\lambda = (1/3, 0, 0, 2/3, 0)$.

ESERCIZIO 2. Vi sono due giocatori: Anna e Giulio. Anna dispone di 9 biglie e Giulio di 1 biglia. Giocano come segue: estraggono due carte senza rimpiazzo da un mazzo di 40 carte, se escono due carte dello stesso seme allora Giulio cede una biglia ad Anna, altrimenti Anna cede una biglia a Giulio. Continuano così (ogni volta estraendo 2 carte da un mazzo da 40) fino a quando uno dei due giocatori resta senza biglie. In tal caso il giocatore rimasto senza biglie ha perso il gioco e l'altro ha vinto il gioco.

- Determinare la probabilità che Anna vinca il gioco.

ESERCIZIO 3. Si consideri un processo di Poisson $(X_t)_{t \geq 0}$ di intensità 10 tale che $X_0 = 2$.

- Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 5, X_4 = 7, X_8 \geq 9)$.

ESERCIZIO 4. Considerare il moto Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ con punto iniziale 0, coefficiente di diffusione 4 e drift 3.

- Calcolare $\mathbb{E}[B_1 B_5]$.
- Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n}$.
- Calcolare $\mathbb{E}[e^{B_1 + 3B_5}]$.