**Non è consentito l'uso di calcolatrici né di materiale didattico.
Tutte le soluzioni devono essere in forma di frazione a/b con a, b
esplicitamente calcolati, ad eccezione dell'esercizio 1c.**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p , allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p , allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1 - p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ , allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1 - p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1.

Si consideri la slot machine descritta come segue. Vi sono tre riquadri. Ogni volta che si gioca con la slot machine, in ogni riquadro appare una figura presa a caso da un insieme di 10 figure distinte. Le possibili 10 figure sono le stesse per i tre riquadri (ananas, fragola, cane, gatto,..) e la figura che appare in un riquadro viene selezionata indipendentemente dalle figure selezionate negli altri riquadri.

Per giocare bisogna pagare 5 euro. Si vincono 50 euro se compaiono tre figure identiche nei tre riquadri (un tris), si vincono 10 euro se esattamente 2 riquadri hanno figure identiche (una coppia), altrimenti non si vince nulla.

- a) Determinare varianza e valore atteso dell'ammontare di soldi che il giocatore vince o perde complessivamente in una singola partita (es. se esce un tris allora il giocatore ha complessivamente vinto $45 = 50 - 5$ euro, se non esce tris ne' coppia allora la vincita complessiva è $-5, \dots$).
- b) Supponiamo che il giocatore voglia ripetere il gioco fino alla realizzazione del secondo tris (fa tris una prima volta e poi continua a giocare fino a quando fa tris una seconda volta). Determinare il valor medio e la varianza del numero di partite effettuate fino alla realizzazione del secondo tris (includere nel conteggio la partita in cui realizza tale tris).

Si consideri ora una slot machine con 4 riquadri (come prima, quando si gioca in ogni riquadro appare - indipendentemente dagli altri riquadri - una figura selezionata a caso da un insieme di 10 figure; l'insieme delle possibili figure è lo stesso per tutti i riquadri).

- c) Giocando una volta con la slot machine, determinare la densità discreta del numero di coppie che appaiono (si ha una coppia quando una figura appare in esattamente 2 riquadri). **Per questo punto non sono richiesti i calcoli espliciti**

ESERCIZIO 2.

A due coniugi viene fatto compilare un questionario con 10 domande a risposta binaria SI/NO. Ciascuna risposta è indipendente dalle precedenti, e prodotta nel modo seguente. La moglie sceglie a caso tra le due risposte. Con probabilità $1/3$

il marito riesce a carpire la risposta della moglie, nel qual caso risponde allo stesso modo, altrimenti sceglie anche lui a caso, indipendentemente dalla risposta della moglie.

- a) Determinare la probabilità dei seguenti quattro eventi: moglie e marito danno entrambi risposta "SI" alla prima domanda, moglie e marito danno entrambi risposta "NO" alla prima domanda, la moglie risponde "SI" e il marito risponde "NO" alla prima domanda, la moglie risponde "NO" e il marito risponde "SI" alla prima domanda.
- b) Dire se gli eventi "la moglie risponda SI alla prima domanda" e "il marito risponde SI alla prima domanda" sono indipendenti, giustificando la risposta.
- c) Chiamato X il numero di risposte "SI" date dalla moglie e chiamato Y il numero di risposte "SI" date dal marito (nell'intero questionario), determinare la densità discreta di X e la densità discreta di Y .

ESERCIZIO 3.

Si stima che tipicamente un eurostar che fa la tratta Roma-Milano (o Milano-Roma) arrivi a destinazione puntuale con probabilità $2/3$ e con ritardo con probabilità $1/3$. Sapendo che l'eurostar arriva in ritardo, tale ritardo è dato da una variabile aleatoria esponenziale di parametro 4 (l'unità di misura del tempo è 1 ora). Se il ritardo è di almeno un'ora, allora Trenitalia rimborsa il biglietto.

- a) Consideriamo un manager che vive a Milano e che si reca a Roma 50 volte in un anno. Supponendo che faccia tutti i viaggi in eurostar (andata e ritorno) e che i vari eurostar operino in maniera indipendente, determinare il valor medio dei rimborsi a cui il manager ha diritto (la costante "e" di eulero - come pure le sue potenze - può essere considerata come valore noto e non si richiede di sostituirla con approssimazioni numeriche).
- b) Risolvere lo stesso problema al punto a) immaginando ora che il numero di volte in cui il manager si reca a Roma sia una variabile aleatoria di Poisson di parametro 50.