# Corso di Laurea in Matematica
# Probabilità I
# Anno Accademico 2012-2013

9 Settembre 2013

L'uso di documenti e gadget elettronici di ogni tipo non è autorizzato. Motivare chiaramente i procedimenti o i risultati proposti. Avete due ore e quaranta minuti. Il testo continua sul dorso del foglio.

**FORMULARIO**

Se $X$ è v.a. binomiale di parametri $n, p$, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se $X$ è v.a. geometrica di parametro $p$, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se $X$ è v.a. di Poisson con parametro $\lambda$, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se $X$ è v.a. ipergeometrica di parametri $n, N, m$ (tipo: estraggo senza rimpiazzo $n$ palline da un'urna con $m$ palline bianche e $N-m$ palline nere e $X$ è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

**ESERCIZIO 1**. *[Nota: Per questo esercizio svolgere esplicitamente i calcoli, dando soluzioni come numeri frazionari]*
Oggi, 9 settembre, Pierpaolo inizia la scuola elementare. Nel nuovo astuccio ha 12 pennarelli distinti allineati.

(a) Determinare la probabilità che i pennarelli rosso, arancione e giallo siano allineati vicini (non necessariamente nell'ordine indicato).

(b) Sapendo che i pennarelli rosso, arancione e giallo sono allineati vicini, determinare la probabilità che i pennarelli verde e blu siano vicini (non necessariamente nell'ordine indicato).

Nella classe di Pierpaolo vi sono 20 bimbi (Pierpaolo incluso). Si supponga che, il primo giorno di scuola, tutti i bimbi siano presenti e che ogni bimbo, indipendentemente dagli altri, venga accompagnato o da un solo genitore (probabilità 5/10), o da entrambi i genitori (probabilità 4/10), o da un solo nonno (probabilità 1/10). Al suono delle campanella tutti i bimbi, genitori e nonni entrano in aula, con la maestra Sara.

(c) Determinare media e varianza del numero di persone presenti nell'aula di Pierpaolo al suono della campanella.

**Soluzione:**
(a) Esiti equiprobabiliti 12!. Esiti favorevoli: 10!3!. Infatti pensiamo al blocco dei pennarelli rosso,arancione, giallo prima come una singola entità, quindi devo allineare 10 oggetti (9 pennarelli e il blocco) [10! modi] e poi allineiamo i 3 pennarelli nel blocco [3! modi]. Soluzione: 10!3!/12!=1/22
(b) sia $F$ l'evento al punto (a) e $E$ l'evento che verde e blu siano vicini. $P(E|F) = |E \cap F|/|F|$. Da sopra ho $|F| = 10!3!$. per calcolare $|E \cap F|$ allineo prima 9 oggetti (7 pennarelli e 2 blocchi) [9! modi], poi allineo i pennarelli all'interno del blocco rosso,arancione,giallo [3! modi] poi allineo i pennarelli all'interno del blocco verde, blu [2! modi] . Quindi $|E \cap F| = 9!3!2!$
Soluzione: 9! 3! 2!/ (10! 3!)= 2/10
(c) Sia $X$ numero di bimbi accompagnati da una sola persona. $X = Bin(20, 6/10)$. $20 - X$ sono i bimbi accompagnati da 2 persone. Sia $N$ il numero di persone totali in aula. $N = 1 + 2X + 3(20 - X) = 61 - X$. Quindi $EN = 61 - EX = 61 - 20 \cdot 6/10 = 61 - 12 = 49$. $Var(N) = Var(61 - X) = Var(X) = 20(6/10)(4/10) = 4.8$

**ESERCIZIO 2** *[Nota: Per questo esercizio svolgere esplicitamente i calcoli, dando soluzioni come numeri frazionari]*
Si stima che, al prossimo meeting internationale di atletica, Bolt vincerà la gara dei 100m con probabilità 9/10 se non vi saranno né pioggia né vento contrario, con probabilità 8/10 se non vi sarà pioggia ma ci sarà vento contrario, con probabilità 8/10 se vi sarà pioggia ma non ci sarà vento contrario, con probabilità 7/10 se vi saranno pioggia e vento contrario.

Si stimano equiprobabili i quattro suddetti casi meteorologici.

(a) Determinare la probabilità che Bolt vinca la gara dei 100m.

(b) Determinare la probabilità che vi sia stata la pioggia sapendo che al meeting Bolt ha in effetti vinto la gara dei 100m.

Per poter assistere alla cerimonia di inaugurazione del meeting gli spettatori devono sottoporsi a controllo da parte del servizio di sicurezza. Lorenzo è in fila all'entrata A per accedere allo stadio e assistere alla cerimonia di inaugurazione. Davanti a lui vi sono 9 persone. Il controllo di una singola persona richiede un tempo aleatorio con densità $f$ pari a

$$f(x) = \begin{cases} C(5-x) & \text{se } x \in [1,5] \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

dove $C$ è un'opportuna constante di normalizzazione (il tempo è misurato in minuti).

(c) Determinare il valor medio del tempo che Lorenzo deve attendere per entrare allo stadio.

**Soluzione:**
(a) Per la legge della probabilità totale la soluzione è $(1/4)(9/10+8/10+8/10+7/10) = 8/10$.
(b) Sia $F$ l'evento che vi siano pioggia e vento contrario e $G$ l'evento che vi sia pioggia ma non vento contrario. Sia $E$ l'evento che Bolt vinca la gara. Allora (per additività e teorema di Bayes)

$$\begin{aligned} P(F \cup G|E) = P(F|E) + P(G|E) &= \frac{P(E/F)P(F)}{P(E)} + \frac{P(E/G)P(G)}{P(E)} \\ &= \frac{(7/10)(1/4)}{8/10} + \frac{(8/10)(1/4)}{8/10} = \frac{(15/10)(1/4)}{8/10} = 15/32\,. \end{aligned}$$

(c) Siccome

$$\int_1^5 (5-x)dx = -\frac{(5-x)^2}{2}\Big|_1^5 = 8\,,$$

la costante $C$ vale 1/8. Il valor medio del tempo richiesto per il controllo di una singola persona è

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\int_1^5 x(5-x)dx = \frac{1}{8}\big[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\big]\Big|_1^5 &= \frac{1}{8}\big(125(1/2-1/3) - (5/2-1/3)\big] \\ &= \frac{1}{8}\big[\frac{125}{6} - \frac{13}{6}\big] = \frac{112}{48}\,. \end{aligned}$$

Per additività del valore atteso, la soluzione è 10 volte il valore suddetto:

$$1120/48$$

**ESERCIZIO 3**
Sia $\mathbf{X} = (X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti e tutte

con la stessa legge $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$, per qualche $p \in (0, 1)$. Posto $\mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}$, definiamo le variabili aleatorie $T_1$, $T_2$, $U$ a valori in $\mathbb{N}^+ \cup \{+\infty\}$ come (assumiano $\inf \emptyset := +\infty$)

$$T_1 \equiv T_1(\mathbf{X}) := \inf \{k \in \mathbb{N}^+ \,:\, X_k = 0\}$$

$$T_2 \equiv T_2(\mathbf{X}) := \inf \{k \in \mathbb{N}^+,\, k > T_1(\mathbf{X}) \,:\, X_k = 0\}$$

$$U \equiv U(\mathbf{X}) := \begin{cases} T_2(\mathbf{X}) - T_1(\mathbf{X}) & \text{se } T_1(\mathbf{X}) < +\infty \\ +\infty & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

(a) Si provi che, dati interi positivi $m < n$,

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\, T_2 = n) = p^{n-2}(1-p)^2$$

(b) Si provi che $U = T_2 - T_1$ con probabilità 1, ossia che $\mathbb{P}(T_1 = +\infty) = 0$.

(c) Per $m$, $u$ interi positivi si determinino $\mathbb{P}(T_1 = m,\, U = u)$, $\mathbb{P}(T_1 = m)$, $\mathbb{P}(U = u)$, e si dica se $T_1$ ed $U$ sono indipendenti (motivando la risposta).

**Soluzione:**

(a) Per $k \in \mathbb{N}^+$, sia $E_k$ l'evento $E_k := \{X_k = 1\}$. Se $m < n$ si ha $\{T_1 = m,\, T_2 = n\} = (\cap_{i<m} E_i) \cap E_m^c \cap (\cap_{m<i<n} E_i) \cap E_n^c$. Gli eventi $(E_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ sono indipendenti, con $\mathbb{P}(E_k) = p$. Pertanto

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\, T_2 = n) = p^{m-1}(1-p)p^{n-m-1}(1-p) = p^{n-2}(1-p)^2$$

(b) Sia $F_1 := \{T_1 = +\infty\}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ abbiamo $F_1 \subset \cap_{k=1}^n E_k$. Ne segue che

$$\mathbb{P}(F_1) \le \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_k) = p^n$$

Poiché tale diseguaglianza é vera per ogni $n$ e $p < 1$, $\mathbb{P}(F_1) = 0$.

(c) Si ha $\{T_1 = m, U = u\} = \{T_1 = m, T_2 = m + u\}$ per cui da (a)

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\, U = u) = \mathbb{P}(T_1 = m,\, T_2 = m + u) = p^{m+u-2}(1-p)$$

D'altra parte

$$\mathbb{P}(T_1 = m) = \mathbb{P}\left( (\cap_{k=1}^{m-1} E_k) \cap E_m \right) = p(1-p)^{m-1}\,.$$

mentre per (a)

$$\mathbb{P}(U = u) = \sum_{m \in \mathbb{N}^+} \mathbb{P}(T_1 = m,\, U = u) = \sum_{m \in \mathbb{N}^+} p^{m+u-2}(1-p) = p^{u-1}$$

Dalle suddette identità segue che

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\, U = u) = \mathbb{P}(T_1 = m)\mathbb{P}(U = u)\,.$$

Siccome $m$ e $u$ sono arbitrarie deduciamo che $T_1$ e $U$ sono indipendenti.